Wie wird was über was integriert?

$\int f \, dO$ and friends

Eine Übersicht für Ingenieure
und Physiker

Dipl. Math. Friedrich Philipp
Technische Universität Berlin
7. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Integration von Funktionen

Eine Funktion ist für uns eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Funktionswerte sind also reelle Zahlen. Das n ist dabei eine beliebige natürliche Zahl. Bei der Integration einer Funktion wollen wir stets darauf hinaus, dass wir über Quader (im $\mathbb{R}^3$), bzw. Rechtecke (im $\mathbb{R}^2$), bzw. Intervalle (in $\mathbb{R}$) integrieren. Das ist dann besonders leicht, weil wir die Integration über solche Mengen auf die Integration über Intervalle in $\mathbb{R}$ zurückführen können. Damit wir wissen, über was wir in diesem kleinen Aufsatz reden, hier vorab zwei kleine Definitionen.

Definition: *Es seien M und N zwei Mengen. Das kartesische Produkt von M und N ist dann wie folgt definiert:*

$$M \times N := \{(x, y) \,:\, x \in M, y \in N\}.$$

Definition: *Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element (keinen gemeinsamen Punkt) besitzen, d.h., wenn $M \cap N = \emptyset$.*

Ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ lässt sich mit dem kartesischen Produkt darstellen als $[a, b] \times [c, d]$. Ebenso lässt sich ein Quader im $\mathbb{R}^3$ darstellen: $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Im folgenden Beispiel wird deutlich, wie eine Funktion über einen Quader integriert wird.

Beispiel 1.1 *Integration von $f(x, y, z) = xyz$ über den Quader $Q = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$.*

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_Q\!\!\int f(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 xyz\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x\left(\int_1^2 y\left(\int_2^3 z\,dz\right)dy\right)dx \\
&= \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_1^2 y\,dy\right)\left(\int_2^3 z\,dz\right) \\
&= \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

Sollen wir eine Funktion über eine Menge B integrieren, die kein Quader (bzw. Rechteck, bzw. Intervall) ist, so müssen wir B parametrisieren. Dabei kommt es erstens auf die „Dimension" der Menge B an. Zum Beispiel ist die Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ 2-dimensional.

Das ist zwar etwas schwammig ausgedrückt, da wir keine Dimension für Mengen definiert haben, die keine Vektorräume sind, aber hier soll uns die Vorstellung reichen. Die Dimension von B soll für uns höchstens 3 sein.
Ist B eindimensional und kein Intervall, so parametrisieren wir B mit einer Abbildung $\gamma : I \to B$, wobei I ein Intervall (oder eine Vereinigung von disjunkten Intervallen) ist. Ist B zweidimensional, dann müssen wir eine Parametrisierung $\gamma : R \to B$ finden, wobei R ein Rechteck (oder eine Vereinigung von disjunkten Rechtecken) ist. Ist B dreidimensional, so ist B durch eine Abbildung $\gamma : Q \to B$ zu parametrisieren, wobei Q ein Quader (oder eine Vereinigung von disjunkten Quadern) ist.
Nun kommt es nicht nur auf die Dimension des Integrationsbereiches B an, sondern auch auf die Dimension des Raumes, in dem sich B befindet, also darauf, ob B in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ liegt. Im Folgenden sei n diese Dimension, also $B \subset \mathbb{R}^n$. Die „Dimension" von B bezeichnen wir mit $\dim B$. $\dim B$ ist natürlich stets höchstens so groß wie die des Raumes ($\dim B \leq n$), denn es kann ja schließlich beispielsweise nichts 3-dimensionales im $\mathbb{R}^2$ liegen.

1.1 $\dim B = n$

$\dim B = n$ bedeutet für uns, dass B entweder eine disjunkte Vereinigung von Intervallen in $\mathbb{R}$, eine Fläche im $\mathbb{R}^2$ oder ein dreidimensionaler Körper im $\mathbb{R}^3$ ist. Im ersten Falle kennen wir die Integration bereits aus der Schule oder aus Analysis I. Ein Beispiel wäre $f(x) = x^2$, $B = [0,1] \cup [2,3]$. Dann ist $\int_B f(\vec{x})d\vec{x} = \int_0^1 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = [x^3/3]_0^1 + [x^3/3]_2^3 = 1/3 + 27/3 - 8/3 = 20/3$. In den anderen beiden Fällen greift hier die *Transformationsformel*. Ist B eine Fläche im R^2 und $\gamma : [a,b] \times [c,d] \to B$ eine Parametrisierung von B, so ist

$$\int\limits_B f(x,y)d(x,y) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(\gamma(u,v)) \cdot |\det \gamma'(u,v)| \, dv\, du.$$

Ist B ein dreidimensionaler Bereich im $\mathbb{R}^3$ und $\gamma : [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to B$ eine Parametrisierung von B, so ist

$$\int\limits_B f(x,y,z)d(x,y,z) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_e^f f(\gamma(u,v,w)) \cdot |\det \gamma'(u,v,w)| \, dw\, dv\, du.$$

γ' ist dabei eine $n \times n$-Matrix. Die Determinante ist also recht einfach zu bestimmen, da ja entweder $n = 2$ oder $n = 3$.

1.2 $\dim B = 2$, $n = 3$

In diesem Falle ist B eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. Haben wir nun eine Parametrisierung $\gamma : [a,b] \times [c,d] \to B$ von B, so integrieren wir eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\int\limits_B f\, dO = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(\gamma(s,t)) \cdot \left| \frac{\partial\gamma}{\partial s} \times \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right| dt\, ds.$$

$|\frac{\partial\gamma}{\partial s} \times \frac{\partial\gamma}{\partial t}|$ heißt das *Oberflächenelement* von B bezüglich γ.

1.3 $\dim B = 1$, $n = 3, 2$

Hier ist B eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Ist $\gamma : [a,b] \to B$ eine Parametrisierung von B, so integrieren wir eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\int\limits_B f\, ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\dot\gamma(t)|\, dt.$$

$|\dot\gamma|$ heißt das *Bogenelement* der Kurve B bezüglich γ.

1.4 Beispiele

In diesem Abschnitt geben wir ein paar kleine Beispiele an, um den Umgang mit den oben besprochenen Integralen zu festigen.

Beispiel 1.2 *Integriere $f(x,y,z) = xy$ über den Einheitskreis in der x-y-Ebene des $\mathbb{R}^3$.*

Lösung: Der Einheitskreis B in der x-y-Ebene des $\mathbb{R}^3$ ist ein eindimensionales Gebilde. Daher ist $\dim B = 1$ und $n = 3$. Eine Parametrisierung des Kreises wäre z.B. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Es ist $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 0)^T$, und damit

$$\int\limits_B f\, ds = \int\limits_0^{2\pi} \cos t \sin t \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 0^2}\, dt = \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Dieses Ergebnis ist auch logisch, denn zu jedem Punkt $(x,y,0) \in B$ ist auch $(-x,y,0) \in B$, und $f(x,y,0) + f(-x,y,0) = xy - xy = 0$, d.h. die Funktionswerte heben sich auf.

Beispiel 1.3 *Integriere $f(x,y) = x^2y^2$ über den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$.*

Lösung: Der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ ist ein eindimensionales Gebilde. Es ist also $\dim B = 1$ und $n = 2$. Eine Parametrisierung des Kreises ist beispielsweise $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Es ist $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)^T$, also

$$\int_B f\,ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\,dt = \left[\frac{1}{32}(4t - \sin(4t))\right]_0^{2\pi} = \pi/4.$$

Beispiel 1.4 *Integriere $f(x,y) = x^2 + y^2$ über die Einheitskreisscheibe B im $\mathbb{R}^2$.*

Lösung: B ist ein zweidimensionales Gebilde. Somit ist $\dim B = n = 2$. Heißt: Die Transformationsformel muss her! Parametrisieren können wir B durch die Abbildung $\gamma(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T$ mit $r \in [0,1]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Wir wollen also über das Rechteck $[0,1] \times [0, 2\pi]$ integrieren. Dazu brauchen wir nach Abschnitt 1.1 den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix. Es ist

$$|\det(\gamma'(r,\varphi))| = \left| \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \right| = |r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi| = r,$$

also

$$\int_B f(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\varphi = \pi/2.$$

Beispiel 1.5 *Integriere $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ über die Einheitskugeloberfläche B im $\mathbb{R}^3$.*

Lösung: Hier ist $\dim B = 2$ und $n = 3$. Eine mögliche Parametrisierung von B ist $\gamma(\theta,\phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^T$ mit $\theta \in [0,\pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$. Wir müssen nun das Oberflächenelement von B bezüglich γ berechnen. Es ist

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} \times \frac{\partial\gamma}{\partial\phi}\right| = \left| \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta} = \sin\theta.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_B f\,dO &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi)\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\phi \\
&= \left(\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int\limits_0^{2\pi}d\phi\right) \\
&= \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi}\cdot 2\pi \\
&= \frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Beispiel 1.6 *Berechne das Volumen der Einheitskugel im* $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Es sei B die genannte Einheitskugel. Es ist $\dim B = n = 3$. Das heißt für uns: Transformationsformel! Die zu integrierende Funktion ist die konstante Einsfunktion $f(x,y,z)=1$, denn das Volumen eines Körpers ist definiert durch das Integral dieser Funktion über den Körper. Wir haben also $\int_B f(x,y,z)d(x,y,z)$ zu berechnen. Wir parametrisieren die Kugel wie folgt:

$$\gamma(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $(r,\theta,\phi)\in[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, was ein Quader ist. Damit ist

$$\gamma'(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Determinante dieser Matrix zu berechnen, entwickeln wir nach der letzten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det\gamma'(r,\theta,\phi) &= \cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\
&\quad + r\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi+r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi) \\
&\quad + r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\phi+r\sin^2\theta\sin^2\phi) \\
&= r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^2\sin^3\theta \\
&= r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\
&= r^2\sin\theta.
\end{aligned}$$

Das Volumen von B ist also

$$\begin{aligned}
\int_B d(x,y,z) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{1} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} \sin\theta \left(\int\limits_0^{1} r^2 \, dr\right) d\theta\right) d\phi \\
&= \left(\int\limits_0^{1} r^2 \, dr\right)\left(\int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right)\left(\int\limits_0^{2\pi} d\phi\right) \\
&= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

2 Integration von Vektorfeldern

Bei der Integration von Vektorfeldern unterscheiden wir zwischen Kurven- und Flussintegralen. In der Definition derer spielen wir die Integration auf die von Funktionen zurück.

2.1 Kurvenintegral

Es sei K eine orientierte Kurve im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, die durch $\gamma : I \to K$ parametrisiert werde. Dabei sei I ein Intervall oder eine Vereinigung disjunkter Intervalle. *Orientiert* heißt hier, dass die Richtung, in der die Kurve durchlaufen wird, von vorneherein festgelegt ist. Das Kurvenintegral eines Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ über K wird nun wie folgt definiert:

$$\int\limits_K \vec{v}\, \vec{ds} := \int\limits_\gamma \vec{v}\, \vec{ds} := \int\limits_I \vec{v}(\gamma(t)) \bullet \dot{\gamma}(t)\, dt.$$

Die Verknüpfung $\bullet$ stellt dabei das Standard-Skalarprodukt dar. Der Integrand im rechten Integral ist eine Funktion mit der Veränderlichen t, die über ein Intervall oder eine disjunkte Vereinigung von Intervallen integriert werden soll - einfach! Ist K' übrigens die entgegengesetzt durchlaufene (bzw. orientierte) Kurve, dann gilt $\int_{K'} \vec{v}\, \vec{ds} = -\int_K \vec{v}\, \vec{ds}$.

2.2 Flussintegral

Es sei F eine durch $\gamma : S \to F$ parametrisierte Fläche im $\mathbb{R}^3$. Dabei ist S eine Fläche – wenn möglich ein Rechteck – im $\mathbb{R}^2$. Das *vektorielle Oberflächenelement* $\frac{\partial\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial\gamma}{\partial y}$ ist dann ein Normalenfeld der Fläche F, nur eben parametrisiert. In welche Richtung der Fläche es zeigt, ist nicht klar, denn auch $\widetilde{\gamma} : \widetilde{S} \to F$ mit $\widetilde{\gamma}(y, x) = \gamma(x, y)$ und $\widetilde{S} = \{(y, x) : (x, y) \in S\}$ ist eine Parametrisierung von F, und

$$\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial y} \times \frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial x} = -\frac{\partial\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial\gamma}{\partial y}.$$

Dieses Problem kann man nur dadurch beheben, dass man am Anfang festlegt, in welche Richtung das Normalenfeld der Fläche zeigen soll. Man sagt auch, man *orientiert* die Fläche. Ist das geschehen, so wird das Flussintegral eines Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie folgt definiert:

$$\int_F \vec{v}\, d\vec{O} := \int_\gamma \vec{v}\, d\vec{O} := \int_S \vec{v}(\gamma(x, y)) \bullet \left(\pm\frac{\partial\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Hier soll bei $\pm$ Plus oder Minus gewählt werden – je nachdem, wie man die Fläche vorher orientiert hat. Der Integrand im rechten Integral ist eine Funktion mit den Veränderlichen

x und y, welche über eine Fläche im $\mathbb{R}^2$, nämlich S, integriert werden soll. Ein solches Integral berechnen wir gemäß Abschnitt 1.1 für $n = 2$, falls S kein Rechteck ist.

Allgemeine Bemerkung: Man sollte sich stets über die Dimensionen im Klaren sein. Wenn man also eine Integrationsaufgabe vor sich liegen hat, sollte man zuerst die Dimension n des Raumes ablesen, in dem sich der Integrationsbereich B befindet, und dann die „Dimension“ von B selbst bestimmen ($\dim B$). Erst dann weiß man, welche Form der Integration anzuwenden ist. So haben wir das in den Beispielen in Abschnitt 1.4 auch gemacht.

3 Für Physiker und interessierte Ingenieure

In den obigen Kapiteln war stets $n \leq 3$. Wie integriert man aber nun eine Funktion über eine parametrisierte Menge im $\mathbb{R}^n$, wo $n > 3$? Auch dies ist ganz einfach. Dazu seien Q ein Quader in einem $\mathbb{R}^k$ ($k \leq n$), $B \subset \mathbb{R}^n$ eine durch $\gamma : Q \to B$ parametrisierte Menge und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine (integrierbare) Funktion. Mit unseren Bezeichnungen aus den vorigen Kapiteln ist also $\dim B = k$.

Ist $k = n$, so ist wieder die Transformationsformel anzuwenden:

$$\int\limits_B f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_Q f(\gamma(\vec{u})) \cdot |\det \gamma'(\vec{u})|\, d\vec{u}.$$

Die Jacobi-Matrix $\gamma'(\vec{u})$ ist dann für jedes $\vec{u} \in Q$ eine $n \times n$-Matrix, deren Determinante sich beispielsweise mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes berechnen lässt.

Nun zum Fall $k < n$. In diesem Fall sieht die „Regel“ für die Integration wie folgt aus:

$$\int\limits_B f\, dO = \int\limits_Q f(\gamma(\vec{u})) \cdot \sqrt{\det\left(\gamma'(\vec{u})^T \gamma'(\vec{u})\right)}\; d\vec{u}. \tag{1}$$

Hier ist $\gamma'(\vec{u})$ eine $n \times k$-Matrix (hat also mehr Zeilen als Spalten). Also ist $\gamma'(\vec{u})^T \gamma'(\vec{u})$ eine $k \times k$-Matrix, und die Determinante lässt sich wieder mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz berechnen. Dass diese stets nichtnegativ ist, mache man sich mit ein paar Betrachtungen aus der linearen Algebra klar. Wir wollen nun noch einsehen, dass sich die Formel (1) für die Fälle

$$(k, n) \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

mit denen aus den Abschnitten 1.2 und 1.3 deckt und kein verallgemeinerter Hokuspokus ist. Im Fall $k = 1$ und $n \in \{2, 3\}$ ist $\gamma(t)$ eine $n \times 1$-Matrix, also ein Vektor. Das gleiche gilt für $\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t)$. Also gilt

$$\sqrt{\det\left(\gamma'(\vec{u})^T \gamma'(\vec{u})\right)} = \sqrt{\det\left(\dot{\gamma}(t) \bullet \dot{\gamma}(t)\right)} = \sqrt{\dot{\gamma}(t) \bullet \dot{\gamma}(t)} = \sqrt{|\dot{\gamma}(t)|^2} = |\dot{\gamma}(t)|\,,$$

was zu zeigen war (siehe Abschnitt 1.3). Wir kommen nun zum Fall $k = 2$ und $n = 3$. Das ist ein kleines bisschen rechenaufwändiger. Wir wollen uns dabei des folgenden Lemmas bemächtigen:

Lemma 3.1 *Es sei A eine reelle 3×2-Matrix, gegeben durch $A = [\vec{u}, \vec{v}]$ mit Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Es gilt dann*

$$\det(A^T A) = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 .$$

Beweis: Zunächst einmal gilt

$$A^T A = \begin{bmatrix} \vec{u}^T \\ \vec{v}^T \end{bmatrix} [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{bmatrix} \vec{u}^T \vec{u} & \vec{u}^T \vec{v} \\ \vec{v}^T \vec{u} & \vec{v}^T \vec{v} \end{bmatrix},$$

also

$$\det(A^T A) = \left(\vec{u}^T \vec{u}\right) \left(\vec{v}^T \vec{v}\right) - \left(\vec{v}^T \vec{u}\right) \left(\vec{u}^T \vec{v}\right) = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2.$$

Seien $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ und $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= \left| \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} \right|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\
&= u_2^2 v_3^2 - 2 u_2 v_3 u_3 v_2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_1^2 - 2 u_3 v_1 u_1 v_3 + u_1^2 v_3^2 \\
&\qquad + u_1^2 v_2^2 - 2 u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_1^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2 u_2 v_3 u_3 v_2 - 2 u_3 v_1 u_1 v_3 - 2 u_1 v_2 u_2 v_1 \\
&\qquad - u_1^2 v_1^2 - u_2^2 v_2^2 - u_3^2 v_3^2 \\
&= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \left[u_1^2 v_1^2 + 2 u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_2^2 + 2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) u_3 v_3 + u_3^2 v_3^2 \right] \\
&= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \left[(u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 + 2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) u_3 v_3 + u_3^2 v_3^2 \right] \\
&= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \left[(u_1 v_1 + u_2 v_2) + u_3 v_3 \right]^2 \\
&= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2,
\end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Das war's aber eigentlich auch schon. Denn mit $\vec{u} = (s, t)$ ist $\gamma'(\vec{u})$ eine 3×2-Matrix, und mit dem Lemma folgt

$$\sqrt{\det\left(\gamma'(\vec{u})^T \gamma'(\vec{u})\right)} = \sqrt{\left| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right|^2} = \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right|,$$

was zeigt, dass die Formel (1) im Fall $k = 2$ und $n = 3$ mit der in Abschnitt 1.2 übereinstimmt.