Das Keplerproblem

Planetenbahnen im Gravitationsfeld

Inhaltsverzeichnis

1 Historischer Hintergrund

Seit Urzeiten beobachtet der Mensch den Himmel bei Nacht, wenn er die Sterne und Planeten zu Gesicht bekommt, und versucht, die Bewegungen der uns umgebenden Körper und das ganze Erscheinungsbild zu deuten und zu erklären. Man versuchte sich an zahlreichen Theorien. Der erste, der es wagte, öffentlich und im Angesichte der geistigen Macht in Europa das geozentrische Weltbild anzuzweifeln war Anfang des 17. Jahrhunderts Galileo Galilei. Er war einer der ersten seiner Zeit, der mit Hilfe des gerade erfundenen Fernrohrs die Sterne und Planeten beobachtete. Er kam dadurch zu dem Schluß, daß die Erde ein Planet ist und wie die anderen Planeten um die Sonne kreist. Dieses veranlaßte Johannes Kepler wenige Jahre später dazu, diese Bahnen genauer zu betrachten. Auf der Basis seiner gesammelten Daten verfaßte er dann drei Naturgesetze, die uns heute als die drei **Keplerschen Gesetze** bekannt sind:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte steht.
2. Die Strecke Sonne–Planet überstreicht bei der Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Der Quotient aus dem Quadrat der Umlaufzeit T und der dritten Potenz der großen Halbachse a ist für jeden Planeten konstant.

Kepler starb im Jahre 1630, und 13 Jahre später sollte ein Mann geboren werden, der imstande war, ein mathematisches Werkzeug bereitzustellen, mit dessen Hilfe er die Keplerschen Gesetze modelltheoretisch beweisen konnte. Dieser Mann war kein anderer als Sir Isaac Newton, und das mathematische Werkzeug nannte er Differential– und Integralrechnung. Zudem erklärte er, welche Kraft dafür verantwortlich ist, daß die Planeten ständig ihre Richtung ändern: die **Gravitationskraft**. Der Sage nach soll ihm der Geistesblitz gekommen sein, als er eines Tages unter einem Apfelbaum saß und ihm ein Apfel auf den Kopf fiel. Auch für geistige Höchstleistungen soll manchmal ein Tritt in den Arsch nicht das Schlechteste sein.

2 Die Gravitationskraft

Newton untersuchte die Gravitationskraft und fand heraus, daß sie eine interagierende Kraft zwischen zwei Massen darstellt, ganz nach seinem Prinzip actio=reactio (3. Newtonsches Gesetz der Mechanik). Befinden sich zwei Massen im Raum, so übt jede Masse auf die andere eine Kraft aus. Die beiden Kräfte haben den gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtungen, und der Betrag ist proportional zu den beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat des euklidischen Abstandes zwischen den Massenpunkten: Eine Masse m_1 im Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^3$ übt auf eine andere Masse m_2 im Punkt $x_2 \in \mathbb{R}^3$ die Kraft

$$F = \frac{Gm_1m_2}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2) \tag{1}$$

aus. Dabei heißt die Konstante G Gravitationskonstante. Ihr Wert soll uns hier nicht interessieren, denn zum Rechnen sind andere Leute da.

Es scheint zunächst etwas unglaubwürdig, daß nach diesem Gesetz ein auf der Erde stehender Mensch vom Betrage her die gleiche Kraft auf die Erde ausübt wie die Erde auf ihn. Die Situation wird jedoch plausibel bei Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes der Mechanik :

$$F = m \cdot a \ , \tag{2}$$

wobei F die Kraft ist, die auf eine Masse m wirkt und a die aus F resultierende Beschleunigung der Masse. Mit den obigen Bezeichnungen erfährt die Masse m_j ($j = 1, 2$) dann eine Beschleunigung

$$a_j = (-1)^j \frac{Gm_1m_2}{r^3 m_j}(x_1 - x_2) \ , \ \ j = 1, 2 \ ,$$

wobei $r = ||x_1 - x_2||$ den Abstand zwischen den Massen darstelle. Die Erde wird also in sehr geringem Maße beschleunigt–im Gegensatz zum Menschen. In dem System Sonne–Planet kann also die Beschleunigung der Sonne in Richtung des Planeten vernachlässigt werden (die Masse der Sonne macht über 99% der Masse unseres Sonnensystems aus).

3 Definition des Keplerproblems

Wie der Titel dieses kleinen Skriptes schon sagt, wollen wir hier die Planetenbahnen um die Sonne untersuchen. Die Untersuchung eines Systems, bestehend aus zwei Massen, nennt man ein **Zweikörperproblem**, da sich beide Körper bewegen. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, ist die Bewegung der Sonne (relativ zum Massenmittelpunkt) vernachlässigbar. Wir untersuchen also eine Bewegung nur eines Körpers in einem Kraft- bzw. Beschleunigungsfeld. Ein solches Problem nennt man dann sinnvollerweise ein **Einkörperproblem** oder auch das **Keplerproblem**.

Es sei M die Masse der Sonne, die sich im Ursprung des $\mathbb{R}^3$ befinde. Diese induziert ein ortsabhängiges Beschleunigungsfeld $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Nach der Definition der Gravitationskraft gilt

$$a(x) = -\frac{GM}{\|x\|^3}\ x \ . \tag{3}$$

Den Weg des Körpers können wir beschreiben als eine Kurve $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, wobei t die Zeit darstelle. Jeder weiß nun noch aus der Schule, daß der Weg s und die Beschleunigung a durch die Gleichung $s'' = a$ in Beziehung stehen. Wir haben für unser Keplerproblem also die folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$\ddot{\varphi} = a(\varphi) \ . \tag{4}$$

Diese Gleichung heißt **Newtonsche Bewegungsgleichung**. Für ein Zweikörperproblem muß man zwei solche Gleichungen lösen, die aber voneinander abhängig sind. Jedoch kann man diese beiden Gleichungen mit Hilfe des Schwerpunktes und des Impulserhaltungssatzes auf eine reduzieren, die eine ebensolche Gestalt besitzt.

4 Vorbereitungen

Nun wollen wir langsam zum mathematischen Teil übergehen. Im Folgenden nehmen wir an, daß φ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^3$ sei. Um einen ersten Schritt zur Lösung der Differentialgleichung (4) zu machen, formulieren wir zwei kleine aber sehr hilfreiche Lemmata.

Lemma 4.1 *$\|\varphi\|$ sei auf jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nicht konstant. φ ist genau dann eine Lösung von $\ddot{\varphi} = a(\varphi)$, wenn gilt:*

(i) $\frac{1}{2}\|\dot{\varphi}\|^2 - \frac{GM}{\|\varphi\|} = \text{const} = E_m$;
(ii) $\varphi \times \dot{\varphi} = \text{const} = N_m$.

Bemerkung *In (ii) bedeutet der $\times$–Operator das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$. Wenn man die Gleichungen (i) und (ii) mit der Masse m des Planeten multipliziert, dann drücken sie die Energieerhaltung und die Drehimpulserhaltung aus.*

Beweis: a) Seien die Bedingungen erfüllt. Wir differenzieren (i) und (ii) und erhalten die Gleichungen

$$(\ddot{\varphi} - a(\varphi))^T \dot{\varphi} = 0 \ , \tag{5}$$

$$\varphi \times \ddot{\varphi} = 0 \ . \tag{6}$$

Aus (6) folgt die Existenz einer stetigen Funktion $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\ddot{\varphi} = \mu\varphi$. Setzen wir dieses in (5) ein, so ergibt sich

$$\Big(\mu + \frac{GM}{\|\varphi\|^3}\Big)\varphi^T \dot{\varphi} = 0 \ .$$

Es gibt somit Intervalle, die $\mathbb{R}$ überdecken, auf denen mindestens einer der beiden Faktoren verschwindet. Sei I ein solches Intervall. Wäre $\varphi^T\dot{\varphi} = 0$ auf I, so folgte mit Integration, daß $\|\varphi\|$ auf I konstant ist. Da dies nach Voraussetzung nicht der Fall ist, verschwindet der erste Faktor auf ganz $\mathbb{R}$. Das ist die Behauptung.
b) φ löse die Differentialgleichung (4). Dazu definieren wir die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) := GM\|x\|^{-1}$. Für ihren Gradienten gilt $\nabla f(x) = a(x)$. Damit erhalten wir $2\ddot{\varphi}^T\dot{\varphi} = 2a(\varphi)^T\dot{\varphi} = 2\nabla f(\varphi)^T\dot{\varphi}$. Integration ergibt (i). Um (ii) zu zeigen, leite man wie in Teil a) die Kurve $\phi = \varphi \times \dot{\varphi}$ nach der Zeit ab. Man erhält dann

$$\dot{\phi} = \varphi \times \ddot{\varphi} = -\frac{GM}{\|\varphi\|^3}(\varphi \times \varphi) = 0 \ ,$$

also mit Integration (ii). □

Lemma 4.2 *Es sei $r := \|\varphi\|$ konstant. φ löst genau dann die Gleichung $\ddot{\varphi} = a(\varphi)$, wenn*

$$\varphi(t) = r(\cos ct \cdot e_v + \sin ct \cdot e_w)\,, \quad c = \frac{\sqrt{GM}}{r\sqrt{r}} \ ,$$

wobei die e_v und e_w Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind, die mit dem Vektor $N_m := \varphi(0) \times \dot{\varphi}(0)$ eine Orthogonalbasis bilden und $\|e_v\| = \|e_w\| = 1$.

Beweis: Durch Differenzieren überzeugt man sich, daß diese Kurven die Gleichung erfüllen. Umgekehrt löse φ die Gleichung. Da in Teil (b) des Beweises des ersten Lemmas nicht eingegangen ist, ob $\|\varphi\|$ konstant ist oder nicht, erfüllt φ die dortigen Bedingungen (i) und (ii). Nach (ii) gilt $\varphi^T N_m = \dot{\varphi}^T N_m = 0$. Weiter gilt $\varphi^T\dot{\varphi} = 0$, da $\|\varphi\|$ konstant ist. Wir wählen daher $e_v = \varphi(0)/\|\varphi(0)\|$ und $e_w = \dot{\varphi}(0)/\|\dot{\varphi}(0)\|$. Da φ nur Komponenten in Richtung von e_v und e_w hat, gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to [0, 2\pi)$, so daß

$$\varphi = r(\cos\gamma \cdot e_v + \sin\gamma \cdot e_w) \ .$$

Zweimalige Differentiation ergibt $\ddot{\varphi} = -\dot{\gamma}^2\varphi + (\ddot{\gamma}/\dot{\gamma})\dot{\varphi}$. Da aber $a(\varphi) = \ddot{\varphi}$ keine Komponente in Richtung von $\dot{\varphi}$ besitzt, ist $\ddot{\gamma} = 0$. Damit besitzt γ die Form $\gamma(t) = ct$. Weiter folgt aus der Darstellung von $\ddot{\varphi}$: $c^2 = \dot{\gamma}^2 = GM/\|\varphi\|^3$. □

Unsere Aufgabe ist es also, eine Kurve φ zu finden, die die Bedingungen (i) und (ii) des ersten Lemmas erfüllt. Wegen der aus der Gleichung (ii) des Lemmas folgenden Orthogonalitätsbeziehung $\varphi^T N_m = 0$ bewegt sich ein Planet im Gravitationsfeld der Sonne auf einer Ebene. In unserem Modell liegt der Ursprung in dieser Ebene, und der Vektor N_m steht senkrecht auf ihr. Wir wählen ein kartesisches (x,y,z)-Koordinatensystem mit der z-Achse in Richtung des Vektors N_m. Dann liegt φ in der (x,y)-Ebene. Wir dürfen also φ als einen Vektor im $\mathbb{R}^2$ annehmen und gehen daher auf Polarkoordinaten über: Es existieren eindeutig bestimmte Funktionen $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß

$$\varphi = r(\cos\gamma, \sin\gamma)^T \ .$$

Wir wollen nun das System (i)&(ii) des ersten Lemmas mit dieser Darstellung ausdrücken. Differentiation von φ nach der Zeit ergibt

$$\dot{\varphi} = \dot{r}(\cos\gamma, \sin\gamma)^T + r\dot{\gamma}(-\sin\gamma, \cos\gamma)^T \ .$$

Damit ist

$$\|\dot{\varphi}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\gamma}^2 \ . \tag{7}$$

Wenden wir das Vektorprodukt auf die Vektoren $(\varphi, 0)$ und $(\dot{\varphi}, 0)$ an, so erhalten wir den Vektor $(0, 0, r^2\dot{\gamma})$. Nach dem ersten Lemma ist das Finden einer Kurve mit nichtkonstanter Norm, die das ursprüngliche Gleichungssystem (4) löst, äquivalent zum Auffinden einer Lösung des folgenden Systems

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\gamma}^2 - \frac{2GM}{r} = 2E_m \tag{8}$$

$$r^2\dot{\gamma} = \|N_m\| \ . \tag{9}$$

5 Lösung der Differentialgleichungen

Das System kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Dazu quadriere man (9) und setze dann in die aus (8) durch Division durch $\dot{\gamma}^2$ hervorgehende

Gleichung ein. Man löse dann noch nach $(\dot r/\dot\gamma)^2$ auf und bilde den Kehrwert und die Wurzel des Ganzen. Man erhält so

$$\frac{\dot\gamma}{\dot r} = \frac{N}{r^2\sqrt{2E + \frac{2\sigma}{r} - \frac{N^2}{r^2}}} =: F(r) \ , \tag{10}$$

wobei $\sigma := GM$ und $N = \|N_m\|$. Finden wir nun noch eine Stammfunktion $G(r)$ zu $F(r)$ mit einer Nullstelle in $r_0 = r(0)$, dann ist $\dot\gamma = G'(r)\dot r$, und somit mit Integration $\gamma = \gamma(0) + G(r)$. Die Lösung des Integrals $\int F(r)dr$ erfolgt durch drei Substitutionen. Zunächst setzen wir $y = 1/r$. Dann führen wir unter der Wurzel eine quadratische Ergänzung durch und substituieren $z = Ny - \sigma/N$. Die letzte Substitution ist gegeben durch $x = ((\sigma^2 + 2EN^2)/N^2)^{-1/2}z$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ndr}{r^2\sqrt{2E + \frac{2\sigma}{r} - \frac{N^2}{r^2}}} &= -\int \frac{Ndy}{\sqrt{-(Ny - \frac{\sigma}{N})^2 + \frac{\sigma^2}{N^2} + 2E}} \\
&= -\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{\sigma^2+2EN^2}{N^2} - z^2}} \\
&= -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \arccos(x) \ .
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$x = \frac{Nz}{\sqrt{\sigma^2 + 2EN^2}} = \frac{N(Ny - \frac{\sigma}{N})r}{r\sqrt{\sigma^2 + 2EN^2}} = \frac{N^2 - \sigma r}{r\sqrt{\sigma^2 + 2EN^2}} = \frac{p - r}{r\varepsilon}$$

mit den Konstanten

$$p = \frac{N^2}{\sigma} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EN^2}{\sigma^2}} \ .$$

Setzen wir nun noch

$$C = \arccos\frac{p - r(0)}{\varepsilon r(0)} \ ,$$

dann ist

$$G(r) := \arccos\Big(\frac{p - r}{r\varepsilon}\Big) - C$$

eine Stammfunktion zu $F(r)$ mit einer Nullstelle in r_0. Demnach gilt mit den obigen Überlegungen $\gamma = \gamma(0) + G(r)$.

Als wir in Abschnitt 4 das (x,y,z)-Koordinatensystem eingeführt hatten, war lediglich wichtig, daß die z-Achse in Richtung des Vektors N_m zeigt. An die Lage der (x,y)-Ebene hatten wir keine Forderungen gestellt. Dies wollen wir nun aber tun, indem wir voraussetzen, daß die x-Achse so gewählt ist, daß $\gamma(0) = C$ ist.

Damit gilt dann $\gamma = C + G(r)$, und nach r aufgelöst erhält man schließlich

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \gamma} \quad . \tag{11}$$

Dies ist genaugenommen natürlich keine Lösung des Differentialgleichungssystems (8)–(9), denn die Zeit t spielt hier keine Rolle mehr. Und genau in diesem Zusammenhang stoßen wir darauf, daß das Keplerproblem tatsächlich als *Problem* angesehen werden kann, denn bisher hat man noch keine aus elementaren Funktionen bestehende Darstellung für den von der Zeit abhängigen Radius oder den Winkel gefunden. Man kann zwar (9) in (8) einsetzen und so eine gewöhnliche Differentialgleichung für r aufstellen. Jedoch vermochte es noch kein Mensch, diese exakt zu lösen. Es gibt aber viele numerische Methoden, mit denen man man auf einfachem Wege zu einer Lösung (r, γ) des Systems (8)–(9) kommt. Bevor wir nun zu dem Hauptkapitel dieses Artikels kommen, wollen wir aber noch eine kleine nützliche Integralgleichung für die Zeit aufstellen. Aus (9) geht hervor, daß γ monoton wachsend ist, also eine (ebenfalls monoton wachsende) Umkehrfunktion g besitzt. Mit dieser gilt

$$t = \frac{1}{N} \int_{C}^{\gamma(t)} r^2(g(\gamma))\, d\gamma \quad , \tag{12}$$

denn aus (9) und der Regel über die Differentiation der Umkehrfunktion erhält man

$$\int_{C}^{\gamma(t)} r^2(g(\gamma))\, d\gamma = N \int_{C}^{\gamma(t)} \frac{d\gamma}{\dot{\gamma}(g(\gamma))} = N \int_{C}^{\gamma(t)} g'(\gamma)\, d\gamma$$

$$= N(g(\gamma(t)) - g(C)) = Nt \quad .$$

6 Die Keplerschen Gesetze

Wir können die Keplerschen Gesetze natürlich nicht wirklich *beweisen*, denn keine physikalische Gesetzmäßigkeit kann bewiesen werden. Jedoch können wir ihre Übersetzung in unser mathematisches Modell beweisen, dem die Newtonschen Axiome zugrunde liegen. Die Übersetzung lautet wie folgt:

Satz 6.1 (Keplersche Gesetze) *Eine Lösung der Differentialgleichung* (4) *mit* $\varepsilon < 1$ *besitzt folgende Eigenschaften:*
(i) Die Kurve, die φ *beschreibt, ist eine Ellipse, deren einer Brennpunkt der Ursprung ist;* φ *verläuft zeitlich periodisch.*
(ii) Die Fläche, die die Strecke $\overline{(0,0),\varphi(t)}$ *in einem Intervall* (t_1,t_2) *überstreicht, hängt lediglich von der Zeitdifferenz* $\Delta t = t_2 - t_1$ *ab.*
(iii) Sind φ_1 *und* φ_2 *Lösungen von* (4) *mit Umlaufzeiten* T_j *und großen Halbachsen* a_j $(j = 1,2)$*, dann gilt*

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad . \tag{13}$$

Beweis: Zunächst wollen wir (ii) beweisen. Mit $n(\varphi) = r(-\sin\gamma, \cos\gamma)$ ist nach Anhang2, Formel (14) die gesuchte Fläche

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} n(\varphi)^T \dot{\varphi}\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\dot{\gamma}\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} N\, dt = \frac{N}{2}\,(t_2 - t_1) \quad .$$

Das ist die Behauptung. Der Darstellung (11) entnimmt man, daß $\varphi(t)$ für alle t in der Menge

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

enthalten ist (siehe Anhang1), wobei $a = p/(1-\varepsilon^2)$ und $b = p/\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Die Gesamtheit aller Punkte aus E stellt wegen $\varepsilon < 1$ eine Ellipse mit großer bzw. kleiner Halbachse a bzw. b dar. Weiter wollen wir bemerken, daß r beschränkt ist, denn aus $-1 \le \cos\gamma \le 1$ und $\varepsilon < 1$ folgt $1+\varepsilon \ge 1+\varepsilon\cos\gamma \ge 1-\varepsilon > 0$ und daraus $p/(1+\varepsilon) \le r \le p/(1-\varepsilon)$. Nun ist γ wegen (9) monoton steigend. Wäre auch γ beschränkt, so wäre $\lim_{t\to\infty}\dot{\gamma}(t) = 0$. Das ist aber wiederum mit (9) ein Widerspruch. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein Wert $T \in \mathbb{R}$, so daß

$\gamma(T) = C + 2\pi$. Damit und mit $R := r^2 \circ g$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(t)}^{\gamma(T+t)-2\pi} R\,d\gamma &= \int_{C}^{\gamma(T+t)-2\pi} R\,d\gamma - \int_{C}^{\gamma(t)} R\,d\gamma \\
&= \int_{\gamma(T)}^{\gamma(T+t)} R\,d\gamma - \int_{C}^{\gamma(t)} R\,d\gamma \\
&= \int_{C}^{\gamma(T+t)} R\,d\gamma - \int_{C}^{\gamma(T)} R\,d\gamma - \int_{C}^{\gamma(t)} R\,d\gamma \\
&= N(T+t) - NT - Nt \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt aufgrund der 2π–Periodizität von R (wegen (11)) und der daraus resultierenden Invarianz des Integrales gegenüber Verschiebung des Integrationsintervalls um 2π. Das vorletzte gilt wegen (12). Da $R \geq 0$, folgt $\gamma(T+t) = \gamma(t) + 2\pi$ und daraus die T–Periodizität von r und φ. Damit ist (i) gezeigt. Aus (i), (ii) und dem Beispiel aus Anhang1 folgt für den Flächeninhalt der Ellipse $2ab\pi = NT$, also

$$T = \frac{2ab\pi}{N} \ .$$

Mit den Darstellungen von a und b von oben ergibt sich

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4b^2\pi^2}{aN^2} = \frac{4p\pi^2}{N^2} = \frac{4\pi^2}{\sigma} \ .$$

Dies ist eine bahnunabhängige Konstante. □

7 Anhang

7.1 Ellipsengleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß eine Kurve $\varphi = r(\cos\gamma, \sin\gamma)$ mit (11) in der Menge E, wie sie in Kapitel 6 definiert ist, verläuft. Dafür ist eine etwas umfangreichere Rechnung notwendig. Wir müssen zeigen, daß für $x = r\cos\gamma$ und $y = r\sin\gamma$ mit r aus (11)

$$b^2(x+\varepsilon a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ ,$$

mit $a = p/(1-\varepsilon^2)$ und $b = p/\sqrt{1-\varepsilon^2}$ gilt. Für die rechte Seite dieser Gleichung erhalten wir

$$a^2b^2 = \frac{p^4}{(1-\varepsilon^2)^3}$$

und verifizieren, daß die linke Seite eben diesem Term entspricht:

$$\begin{aligned} b^2(x+\varepsilon a)^2 + a^2y^2 &= \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}\Big(\frac{p\cos\gamma(1-\varepsilon^2)+p\varepsilon(1+\varepsilon\cos\gamma)}{(1+\varepsilon\cos\gamma)(1-\varepsilon^2)}\Big)^2 \\ &\quad + \frac{p^4\sin^2\gamma}{(1+\varepsilon\cos\gamma)^2(1-\varepsilon^2)^2} \\ &= \frac{p^4}{(1-\varepsilon^2)^3}\cdot\frac{(\cos\gamma+\varepsilon)^2+(1-\varepsilon^2)(1-\cos^2\gamma)}{(1+\varepsilon\cos\gamma)^2} \\ &= \frac{p^4}{(1-\varepsilon^2)^3} \ . \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen! □

7.2 Fahrstrahl und Fläche im $\mathbb{R}^2$

Wir wollen die Fläche berechnen, die die Strecke $\overline{(0,0),\varphi(t)}$ in einem Zeitintervall $[t_1;t_2]$ überstreicht. Dazu teilen wir das Intervall in m äquidistante Teilintervalle

$[t_i; t_{i+1} = t_i + \Delta t]$ auf und berechnen die Fläche der Dreiecke mit den Eckpunkten $(0,0)$, $\varphi(t_i + \Delta t)$ und $\varphi(t_i)$ als Näherung.

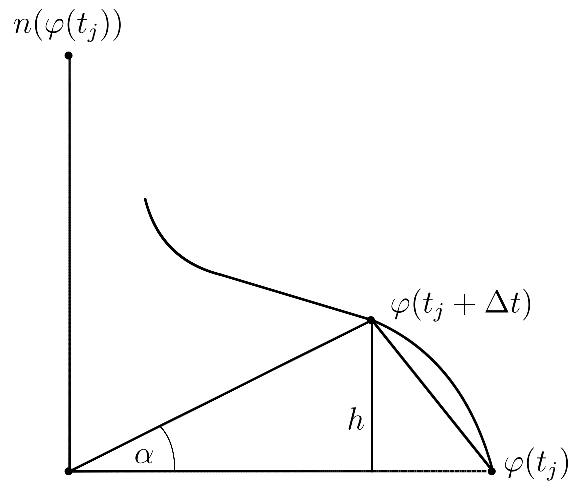

Abbildung 1: Flächenapproximation durch Dreiecke

Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 1 gilt

$$\begin{aligned} h &= \|\varphi(t_i + \Delta t)\| \sin \alpha \\ &= \|\varphi(t_i + \Delta t)\| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \ . \end{aligned}$$

Definieren wir noch für einen Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $n(v) := (-v_2, v_1)$, so ist die Dreiecksfläche gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2} \|\varphi(t_i)\| \cdot h = \frac{1}{2} \|n(\varphi(t_i))\| \|\varphi(t_i + \Delta t)\| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} n(\varphi(t_i))^T \varphi(t_i + \Delta t) \\ &= \frac{1}{2} \Delta t \, n(\varphi(t_i))^T \, \frac{\varphi(t_i + \Delta t) - \varphi(t_i)}{\Delta t} \ . \end{aligned}$$

Die Summe der ΔA_i konvergiert somit mit $\Delta t \to 0$ beziehungsweise $m \to \infty$ gegen das Integral

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} n(\varphi(t))^T \dot{\varphi}(t) \, dt \ . \tag{14}$$

Beispiel: (Flächeninhalt der Ellipse) Eine Ellipse im $\mathbb{R}^2$ mit großer Halbachse a, kleiner Halbachse b und dem Ursprung als Mittelpunkt hat die Parametrisierung

$$\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t) \ .$$

Dabei ist $n(\varphi(t))^T \dot{\varphi}(t) = ab$ und somit mit (14)

$$A = \frac{1}{2}\, ab \int\limits_0^{2\pi} dt = ab\pi \ ,$$

was in jeder guten Formelsammlung zu finden ist. $\square$