

# $\lambda$ -Gruppen

Fritz Philipp

26. Februar 2002

## Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Definition und elementare Eigenschaften	3
3	Die Struktur von $\lambda$ -Gruppen	5
4	Unter- $\lambda$ -Gruppen	6

## 1 Einleitung

Der geneigte Leser mag sich jetzt fragen: „ $\lambda$ -Gruppen“ – was ist das eigentlich und was soll das?  $\lambda$ -Gruppen sind spezielle Vereinigungen von isomorphen Gruppen – soviel kann ich schonmal verraten. Was das soll, weiß ich nicht. Wahrscheinlich ist es nur mathematische Spielerei. Aber wer weiß – vielleicht kann man sie ja doch noch mal gebrauchen.

Wer einen Blick wagt auf die erste Definition, der bemerkt sicher sofort die Ähnlichkeit zur Definition einer Gruppe. Der Unterschied ist nur, daß bei einer Gruppe neutrales und inverses Element als linksneutral bzw. –invers definiert werden und hier „über Kreuz“. Dieser kleine Unterschied hat große Auswirkungen auf die Struktur. Diese wird in Kapitel 2 unter die Lupe genommen. In den darauf folgenden Kapiteln wird versucht, ähnliche Definitionen wie bei Gruppen auf- und die Unterschiede herauszustellen.

## 2 Definition und elementare Eigenschaften

**Definition:** Eine  $\lambda$ -Gruppe ist ein Paar  $(H, \times)$  bestehend aus einer Menge  $H$  und einer Verknüpfung  $\times$  auf  $H$  mit folgenden Eigenschaften

- ( $\lambda 1$ ) Für alle  $x, y, z \in H$  gilt  $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$  (Assoziativität);
- ( $\lambda 2$ ) Es gibt ein Element  $e \in H$  (linksneutrales Element) mit  $e \times x = x$  für alle  $x \in H$  ;
- ( $\lambda 3$ ) Zu jedem  $x \in H$  und jedem linksneutralen Element  $e \in H$  existiert ein  $x' \in H$  (rechtsinverses Element zu  $x$  bezüglich  $e$ ), so daß  $x \times x' = e$ .

**Bemerkung:** Im Folgenden schreiben wir statt  $x \times y$  nur kurz  $xy$ .

**Lemma 1.** Die Rechtsinversenbildung bezüglich eines linksneutralen Elements ist eindeutig. D.h.: Zu  $x \in H$  gibt es genau ein  $x' \in H$  mit  $xx' = e$ .

*Beweis.* Es sei  $x \in H$  und  $xa = xb = e$  mit  $a, b \in H$ . Zu  $a$  gibt es wiederum ein  $a' \in H$ , so daß  $aa' = e$ . Dieses ist bereits eindeutig bestimmt durch  $xe$ , denn  $a' = ea' = (xa)a' = x(aa') = xe$ . Damit folgt  $a = ea = (aa')a = a(xe)a = ax(ea) = axa = a(xa) = ae$ . Schließlich gilt  $b = eb = aa'b = a(xe)b = ax(eb) = a(xb) = ae = a$ .  $\square$

Die Aussage dieses Lemmas erlaubt uns, die Bildung des rechtsinversen Elementes bezüglich eines linksneutralen Elementes  $e \in H$  als Abbildung zu betrachten, also  $' : H \longrightarrow H, a \mapsto a'$ . Wir tragen nun ein paar wichtige Folgerungen aus den Axiomen zusammen.

**Satz 1.** *Es sei  $H$  eine  $\lambda$ -Gruppe. Dann gilt*

(i) *Für alle  $x, y \in H$  gilt*

$$(xy)' = y'x' \quad , \quad x'' = xe \quad , \quad (x^2)' = (x')^2 \quad , \quad x''' = x' \quad . \quad (1)$$

(ii) *Zu jedem  $x \in H$  gibt es genau ein  $e_x \in H$ , so daß  $xe_x = x$ .*

(iii) *Für  $x \in H$  ist  $e_{x'} = e'_x = e$ .*

(iv) *Gilt  $a^2 = a$  für ein  $a \in H$ , dann ist  $a$  ein linksneutrales Element. Wegen  $e_x^2 = e_x$  folgt daraus insbesondere, daß  $e_x$  für alle  $x \in H$  ein universelles Linksneutrales ist.*

(v) *Die Menge  $R_e = \{x \in H \mid \exists y \in H : yx = e\} \subset H$  ist eine Gruppe.*

*Beweis.* (i)  $(xy)(y'x') = x(yy')x' = xex' = xx' = e$ ,  $x'' = ex'' = (xx')x'' = x(x'x'') = xe$ ,  $(x^2)' = (xx)' = x'x' = (x')^2$ ,  $x''' = (x'')' = (xe)' = ex' = x'$ .

(ii) Setze  $e_x = x'x$ . Dann gilt  $xe_x = x(x'x) = (xx')x = ex = x$ , und aus  $xa = x$  folgt  $a = ea = (x'x'')a = x'(xe)a = x'(xa) = x'x = e_x$ .

(iii)  $e_{x'} = x''x' = xex' = xx' = e$ ,  $e'_x = (x'x)' = x'x'' = e$ .

(iv) Aus  $a^2 = a$  folgt zunächst  $a' = (a^2)' = (a')^2$  und daraus wiederum  $e = aa' = a(a')^2 = ea' = a'$ . Für alle  $x \in H$  gilt dann  $x = ex = aa'x = aex = ax$ .

(v) Zunächst zeigen wir, daß  $R_e$  gegenüber der Verknüpfung  $\times$  abgeschlossen ist. Dazu seien  $x, y \in R_e$ . Dann gibt es  $\tilde{x}, \tilde{y} \in H$  mit  $\tilde{x}x = \tilde{y}y = e$ . Es folgt  $(\tilde{y}\tilde{x})(xy) = \tilde{y}(\tilde{x}x)y = \tilde{y}y = e$ , folglich  $xy \in R_e$ . Zu zeigen bleibt, daß es zu jedem Element in  $R_e$  ein Linksinverses in  $R_e$  gibt. Dann sind die Gruppenaxiome erfüllt. Es sei  $x \in R_e$ . Dann gibt es ein  $y \in H$ , so daß  $yx = e$ . Nach dem Lemma ist dann  $x = y'$ . Wegen  $xx' = e$  ist  $x' \in R_e$ , und es gilt  $x'x = y''x = (ye)x = y(ex) = yx = e$ .  $\square$

**Zusatz:** *Für  $a, b \in H$  ist die Gleichung  $ax = b$  stets lösbar. Sogar eindeutig, denn löst  $x \in H$  die Gleichung, dann folgt  $x = e_ax = a'ax = a'b$ , und tatsächlich löst  $a'b$  die Gleichung.*  $\square$

Da das neutrale Element und die Inversen in einer Gruppe eindeutig bestimmt sind, gilt für alle  $x \in R_e$ :  $e_x = e$ ,  $ex = xe = x$  und  $x'x = xx' = e$ . Wir nennen die Gruppe  $R_e$  die *Teilgruppe zum Linksneutralen  $e$  von  $H$*  und werden im nächsten Kapitel auch sehen, warum. Zunächst jedoch formulieren wir noch eine wichtige Feststellung in folgendem

**Lemma 2.** *Es gilt  $xR_e = R_e$  für alle  $x \in H$ .*

*Beweis.* Es sei  $x \in H$ . a) Sei  $y \in xR_e$ , d.h. es gibt ein  $\tilde{x} \in R_e$  mit  $y = x\tilde{x}$ . Dann folgt  $(\tilde{x}'x')y = (\tilde{x}'x')(x\tilde{x}) = \tilde{x}'(x'x)\tilde{x} = \tilde{x}'(e_x\tilde{x}) = \tilde{x}'\tilde{x} = e$ , d.h.  $y \in R_e$ . b) Sei  $y \in R_e$ . Dann ist  $\tilde{x} = x'y \in R_e$ , denn  $(y'x)\tilde{x} = (y'x)(x'y) = y'(xx')y = y'ey = y'y = e$ , und es gilt  $x\tilde{x} = x(x'y) = (xx')y = ey = y$ , d.h.  $y \in xR_e$ .  $\square$

### 3 Die Struktur von $\lambda$ -Gruppen

Im vorigen Kapitel haben wir die elementaren Eigenschaften von  $\lambda$ -Gruppen erörtert. Jetzt wollen wir deren Strukturen näher untersuchen. Es sei  $H$  eine beliebige  $\lambda$ -Gruppe. Ist  $e \in H$  das einzige Linksneutrale in  $H$ , dann folgt aus Satz 1 (iv), daß  $e_x = e$  für alle  $x \in H$ , also  $x'x = e_x = e$ .  $H$  ist dann eine Gruppe. „Echte“  $\lambda$ -Gruppen haben folglich mehrere Linksneutrale. Daher definieren wir die Menge der Linksneutralen einer  $\lambda$ -Gruppe  $H$  durch  $L := \{a \in H \mid ax = x \text{ für alle } x \in H\}$ . Im Folgenden brauchen wir oft die Rechtsinversenbildung bezüglich zweier linksneutralen Elemente  $e$  und  $a$ . Daher sei in diesem Kapitel  $'$  die Rechtsinversenbildung bezüglich  $e$  und  $*$  die bezüglich  $a$ .

**Satz 2.** *Es sei  $H$  eine  $\lambda$ -Gruppe und  $L$  die Menge derer Linksneutralen. Dann sind die Mengen  $R_e$  mit  $e \in L$  paarweise disjunkt, und es gilt*

$$H = \bigcup_{e \in L} R_e . \quad (2)$$

*Beweis.* Für  $e, a \in L$  mit  $e \neq a$  sei  $x \in R_e \cap R_a$ . Dann gilt  $x'x = e$  wegen  $x \in R_e$ , und  $xa = x$  wegen  $x \in R_a$ . Daraus folgt  $a = ea = x'xa = x'x = e$ , was einen Widerspruch zur Annahme  $e \neq a$  darstellt. Wir kommen zum Beweis von (2). Es sei  $x \in H$ ,  $a \in L$  und  $b = x^*$ . Dann ist  $x \in R_{a_x}$ , denn  $bx = x^*x = a_x$ . Damit ist dieser Satz bewiesen.  $\square$

Wir haben eine  $\lambda$ -Gruppe  $H$  nun also unterteilt in einzelne Klassen, die alle Gruppen sind und bei denen jede durch ein Linksneutrales von  $H$  charakterisiert ist. Wir werden im Folgenden sehen, daß diese Klassen, die ja Gruppen sind, isomorph zueinander sind, insbesondere also für endliches  $H$  gleiche Ordnung besitzen.

**Satz 3.** *Die Gruppen  $R_e, e \in L$ , sind alle paarweise isomorph zueinander.*

*Beweis.* Wir zeigen, daß die Abbildung  $\varphi : R_e \rightarrow R_a$ ,  $\varphi(x) = xa$  für zwei Linksneutrale  $e, a \in L$  ein Gruppenisomorphismus ist. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn wegen  $x'(xa) = (x'x)a = e_x a = a$  ist  $\varphi(x) = xa \in R_a$ . Zum Beweis der Injektivität von  $\varphi$  seien  $x, \tilde{x} \in R_e$  mit  $\varphi(x) = \varphi(\tilde{x})$ , also  $xa = \tilde{x}a$ . Dann folgt  $\tilde{x} = \tilde{x}e = \tilde{x}(ae) = (\tilde{x}a)e = (xa)e = x(ae) = xe = x$ . Zur Surjektivität sei  $y \in R_a$ . Mit  $x = ye$  ist dann  $x \in R_e$ , denn mit  $b = y^*$  gilt  $bx = y^*ye = ae = e$ . Damit folgt  $\varphi(x) = xa = (ye)a = y(ea) = ya = y$ .  $\varphi$  ist folglich bijektiv. Die Homomorphismus-Eigenschaft von  $\varphi$  ergibt sich aus  $\varphi(x\tilde{x}) = x\tilde{x}a = x(a\tilde{x})a = (xa)(\tilde{x}a) = \varphi(x)\varphi(\tilde{x})$ .  $\square$

**Korollar 1.** *Mit dem Isomorphismus  $\varphi : R_e \rightarrow R_a$ ,  $\varphi(x) = xa$  aus dem Beweis des letzten Satzes gilt für alle  $x \in R_e$ :  $\varphi(x') = \varphi(x)^* = x^*$ .*

*Beweis.*  $\varphi(x') = x'a = x'(xx^*) = (x'x)x^* = ex^* = x^* = ax^* = (xa)^* = \varphi(x)^*$ .  $\square$

**Definition:** Es sei  $H$  eine  $\lambda$ -Gruppe. Die Anzahl  $|L|$  der linksneutralen Elemente in  $H$  nennen wir den Index von  $H$ :  $\text{ind}(H) = |L|$ . Die Anzahl der Elemente in einer Teilgruppe  $R_e$  von  $H$  heißt die Teilordnung von  $H$  und wird mit  $\text{ord}(H)$  bezeichnet. Die Ordnung von  $H$  ist die Anzahl der Elemente von  $H$ , die wir mit  $\text{Ord}(H)$  bezeichnen wollen.

**Korollar 2.** *Für endliche  $\lambda$ -Gruppen ist der Index ein Teiler der  $\lambda$ -Gruppen-Ordnung.*

*Beweis.* Sei  $H$  eine endliche  $\lambda$ -Gruppe mit  $|H| = n \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 2 ist  $H$  die Vereinigung von  $\text{ind}(H)$  disjunkten Gruppen der gleichen Ordnung  $m \in \mathbb{N}$ . Es gilt also  $n = m \cdot \text{ind}(H)$ .  $\square$

**Korollar 3.** *Ist die  $\lambda$ -Gruppen-Ordnung von  $H$  prim, dann ist  $H$  entweder eine Gruppe oder die triviale  $\lambda$ -Gruppe, in der jedes Element Linksneutrales ist.*  $\square$

## 4 Unter- $\lambda$ -Gruppen

**Definition:** Eine nichtleere Teilmenge  $V \subset H$  einer  $\lambda$ -Gruppe  $H$  heißt *Unter- $\lambda$ -Gruppe* von  $H$ , falls Folgendes erfüllt ist:

(U $\lambda$ 1) Sind  $x, \tilde{x} \in V$ , dann ist auch  $x\tilde{x} \in V$ .

(U $\lambda$ 2) Zu jedem  $x \in V$  und jedem  $e \in V \cap L \neq \emptyset$  gibt es ein  $x' \in V$ , so daß  $xx' = e$ .

Im Folgenden schreiben wir  $L(V) = \{e \in V \mid ex = x \text{ für alle } x \in V\}$  für die Menge der linksneutralen Elemente in einer Unter- $\lambda$ -Gruppe  $V$ . Das folgende Lemma sagt mehr über  $L(V)$  aus.

**Lemma 3.** *Für die Menge der Linksneutralen in einer Unter- $\lambda$ -Gruppe  $V$  gilt*

$$L(V) = V \cap L \tag{3}$$

*Beweis.* Es sei  $\ell \in L(V)$  ein Linksneutrales in  $V$ . Wäre  $\ell \notin V \cap L$ , dann gibt es wegen  $V \cap L \neq \emptyset$  ein  $e \in V \cap L$ . Weil auch  $\ell \in H$ , gibt es ein  $a \in L$ , so daß  $\ell \in R_a$ . Daraus folgt  $\ell = la = \ell(ea) = (\ell e)a = ea = a \in L$ . Widerspruch.  $\square$

**Lemma 4.** *Eine Unter- $\lambda$ -Gruppe ist selbst wieder eine  $\lambda$ -Gruppe.*

*Beweis.* Da  $V \subset H$ , ist  $(\lambda 1)$  natürlich erfüllt für  $V$ . Nach  $(U\lambda 2)$  ist  $V \cap L \neq \emptyset$ . Daher gibt es ein linksneutrales Element in  $V$ , und  $(\lambda 2)$  ist erfüllt. Zu  $(\lambda 3)$  sei  $x \in V$  und  $\ell \in V$  ein linksneutrales Element in  $V$ . Nach Lemma 3 ist  $\ell \in V \cap L$ . Wegen  $(U\lambda 2)$  gibt es dann ein  $x' \in V$ , so daß  $xx' = \ell$ .  $\square$

**Beispiel:** Es sei  $H = R_e \cup R_a$  eine  $\lambda$ -Gruppe und  $U_e$  eine Untergruppe von  $R_e$ . Weiter sei  $U_a = \varphi(U_e)$  mit dem Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 3  $\varphi : R_e \rightarrow R_a$ ,  $\varphi(x) = xa$ . Dann ist  $U_a$  eine Untergruppe von  $R_a$  und  $V = U_e \cup U_a$  eine Unter- $\lambda$ -Gruppe von  $H$ .

*Beweis.* a) Da  $\varphi$  ein Isomorphismus ist, ist eigentlich klar, daß  $U_a$  eine Untergruppe von  $R_a$  ist. Wir beweisen dies trotzdem. Es seien  $y, \tilde{y} \in U_a$  mit  $y = \varphi(x)$ ,  $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$ , wobei  $x, \tilde{x} \in U_e$ . Dann gilt  $y\tilde{y} = \varphi(x)\varphi(\tilde{x}) = \varphi(x\tilde{x})$ . Wegen  $x\tilde{x} \in U_e$  ist auch  $y\tilde{y} \in U_a$ . Es bleibt die Existenz von Linksinversen zu zeigen. Sei dazu  $y \in U_a$  mit  $\varphi(x) = y$ . Dann gilt nach Korollar 1:  $y^* = \varphi(x)^* = \varphi(x') \in U_a$ , da  $x' \in U_e$ , und  $y^*y = \varphi(x)^*\varphi(x) = \varphi(x')\varphi(x) = \varphi(x'x) = \varphi(e) = ea = a$ . b) Wir kommen zum eigentlichen Beweis. Es ist  $L = \{e, a\} = V \cap L$ . Zum Beweis von  $(U\lambda 1)$  seien  $x, \tilde{x} \in V = U_e \cup U_a$ . Sind  $x$  und  $\tilde{x}$  in derselben Untergruppe enthalten, dann liegt  $x\tilde{x}$  natürlich auch in dieser und somit in  $V$ . Es sei also o.B.d.A.  $x \in U_e$  und  $\tilde{x} \in U_a$ . Dann gilt  $x\tilde{x} = x(a\tilde{x}) = (xa)\tilde{x} = \varphi(x)\tilde{x}$ . Da  $\varphi(x), \tilde{x} \in U_a$ , ist auch  $x\tilde{x} = \varphi(x)\tilde{x} \in U_a \subset V$ . Zum Beweis, daß auch  $(U\lambda 2)$  erfüllt ist, sei  $x \in V$ . O.B.d.A. sei  $x \in U_e$ . Dann ist auch  $x' \in U_e \subset V$  mit  $xx' = e$ . Außerdem gilt  $x^* = \varphi(x') \in \varphi(U_e) = U_a \subset V$  und  $xx^* = a$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt nun, daß Unter- $\lambda$ -Gruppen stets eine solche Form haben. Mit allem vorher Gezeigten ist er leicht zu beweisen.

**Satz 4.** *Eine Unter- $\lambda$ -Gruppe  $V$  einer  $\lambda$ -Gruppe  $H$  hat die Form*

$$V = \bigcup_{e \in V \cap L} U_e, \quad (4)$$

wobei  $U_e = \{x \in V \mid \exists y \in V : yx = e\}$  für  $e \in L(V)$  eine Untergruppe von  $R_e$  ist.

*Beweis.* Nach Satz 1 (v) und Lemma 4 ist  $U_e$  eine Gruppe. Wegen  $U_e \subset R_e$  ist  $U_e$  deshalb eine Untergruppe von  $R_e$ . Nach Lemma 4, Satz 2 und Lemma 3 gilt

$$V = \bigcup_{e \in L(V)} U_e = \bigcup_{e \in V \cap L} U_e. \quad \square$$

**Korollar 4.** Für  $a \in V \cap L$  gilt  $U_a = V \cap R_a$ .

*Beweis.* Wegen  $U_e \cap R_a \subset R_e \cap R_a = \emptyset$  für  $e \neq a$  gilt nach Satz 4

$$V \cap R_a = \left( \bigcup_{e \in V \cap L} U_e \right) \cap R_a = \bigcup_{e \in V \cap L} (U_e \cap R_a) = U_a \cap R_a = U_a \quad \square$$