Semi-Fredholm-Operatoren

Ein Vortrag im Rahmen des Seminars
„Lineare Operatoren“

Fritz Philipp

14. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Bemerkungen

Damit der geneigte Leser sich nicht gezwungen sieht, bei der Lektüre die Bedeutung von Symbolen oder Ausdrücken zu erraten, wollen wir eingangs noch ein paar Erläuterungen machen. In diesem Text ist der Begriff des linearen Unterraums algebraisch zu verstehen, d.h., ein linearer Unterraum eines normierten Raumes ist hier nicht zwangsläufig abgeschlossen - nur, wenn dieses explizit gefordert wird. Auch die Symbole $\oplus$ (direkte Summe von linearen Unterräumen) und dim (Dimension eines linearen ((Unter-)raumes) haben ausschließlich algebraische Bedeutung. In der Notation von Bild und Kern einer linearen Abbildung T zwischen zwei Vektorräumen halten wir uns an [2]. Das Bild von T wird mit $R(T)$ bezeichnet, der Kern mit $N(T)$. Die Gesamtheit aller stetigen, linearen Operatoren zwischen zwei normierten Räumen X und Y fassen wir in der Menge $\mathscr{B}(X,Y)$ zusammen. Dieser Raum ist enthalten in der Menge der abgeschlossenen Operatoren von X nach Y, welche wir mit $\mathscr{C}(X,Y)$ bezeichnen wollen. Ist $X=Y$, so schreiben wir wie üblich $\mathscr{B}(X)$ statt $\mathscr{B}(X,Y)$ bzw. $\mathscr{C}(X)$ anstatt von $\mathscr{C}(X,Y)$. Den dualen Raum eines normierten Raumes X bezeichnen wir mit X'.

2 Grundlagen

2.1 Stetige Projektionen und Unterräume

In der Fredholmtheorie spielen endlichdimensionale Unterräume eine große Rolle. Deshalb werden wir hier betrachten, wie sie sich in unendlichdimensionale normierte Vektorräume einfügen.

Lemma 2.1 *Es sei E ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $n := \dim E < \infty$. Dann gibt es Basen $\{e_1,\dots,e_n\}$ von E und $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ von E' mit $\|e_i\| = \|e'_i\| = 1$ für $i=1,\dots,n$ und $e'_j(e_i) = \delta_{ij}$ für alle $i,j=1,\dots,n$.*

Beweis: Es sei $\{a_1,\dots,a_n\}$ irgendeine Basis von E und $\Phi : E \to \mathbb{K}^n$ der Isomorphismus mit $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \longmapsto (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Dann definiere

$$V : E^n \to \mathbb{K}\,,\ V(x_1,\dots,x_n) := \det(\Phi(x_1),\dots,\Phi(x_n)).$$

Die Menge $K := \{(x_1,\dots,x_n) \in E^n : \|x_i\| = 1 \forall i\}$ ist im endlichdimensionalen Raum E^n kompakt. $|V|$ besitzt somit auf K ein Maximum, das etwa bei $(e_1,\dots,e_n) \in K$ angenommen wird. Wegen $V(a_1/\|a_1\|,\dots,a_n/\|a_n\|) \neq 0$ ist auch $V(e_1,\dots,e_n) \neq 0$. Daraus folgt, dass die e_i linear unabhängig sind und somit eine Basis von E bilden. Die Abbildungen $e'_j : E \to \mathbb{K}$,

$$e'_j(x) := \frac{V(e_1,\dots,e_{j-1},x,e_{j+1},\dots,e_n)}{V(e_1,\dots,e_n)}$$

sind für alle $j = 1, \dots, n$ linear, also Elemente aus E'. Weiter ist $e'_j(e_i) = \delta_{ij}$, und nach der Definition der e_i ist $|e'_j(x)| \leq 1$ für $\|x\| = 1$, also $\|e_j\| \leq 1$. Aber da $e'_j(e_j) = 1$, folgt $\|e'_j\| = 1$. □

Lemma 2.2 *Es sei X ein normierter Vektorraum und $E \subseteq X$ ein linearer Unterraum mit $n := \dim E < \infty$. Dann gibt es eine stetige lineare Projektion $P : X \to E$ mit $\|P\| \leq n$.*

Beweis: Wähle Basen $\{e_1, \dots, e_n\}$ von E und $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ von E' wie in Lemma 2.1. Sei $x'_i \in X'$ eine Hahn-Banach-Fortsetzung von e'_i mit $\|x'_i\| = 1$. Damit definiere $P : X \to E$ durch

$$Px := \sum_{i=1}^{n} x'_i(x) e_i.$$

Es ist klar, dass P auf E abbildet und linear ist. Für $e = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$ gilt $Pe = \sum_{i=1}^n x'_i(e) e_i = \sum_{i=1}^n e'_i(e) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = e$. Für beliebiges $x \in X$ ist $Px \in E$. Deshalb gilt $P^2 = P$. Somit ist P eine lineare Projektion auf E, und die Abschätzung

$$\|Px\| = \|\sum_{i=1}^{n} x'_i(x) e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x'_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\| = n \cdot \|x\|.$$

zeigt die Stetigkeit. □

Folgender Satz ist nun sehr wichtig für unsere Überlegungen zur Fredholmtheorie. Wir werden ihn ständig anwenden.

Satz 2.3 *Es sei X ein normierter Vektorraum und $E \subseteq X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Ferner existiere eine stetige lineare Projektion P von X auf E. Dann gibt es einen abgeschlossenen linearen Unterraum $W \subseteq X$, so dass $X = E \oplus W$ und $W = N(P)$.*

Beweis: Setze $W := (I - P)X = \{x - Px : x \in X\}$. Man sieht leicht, dass W ein linearer Unterraum von X ist. Ist $x \in X$, dann gilt $x = Px + (x - Px) \in E + W$, also $X = E + W$. Die Direktheit der Summe folgt so: Sei $x \in E \cap W$. Dann gibt es $\widetilde{x} \in X$, so dass $x = \widetilde{x} - P\widetilde{x}$. Da $x \in E$, folgt $x = Px = P\widetilde{x} - P^2\widetilde{x} = 0$. Ist nun $w \in W$, so ist $E \ni Pw = -(w - Pw) + w \in W$, also $Pw = 0$ bzw. $w \in N(P)$. Aus $Px = 0$ folgt wiederum $x = x - Px \in W$. Somit ist $W = N(P)$, und daraus folgt auch die Abgeschlossenheit von W. □

Korollar 2.4 *Zu jedem endlichdimensionalen linearen Unterraum E eines normierten Vektorraumes X gibt es einen abgeschlossenen linearen Unterraum $W \subseteq X$, so dass $X = E \oplus W$.* □

Korollar 2.5 *Es seien die gleichen Bedingungen und Bezeichnungen wie in Satz 2.3 gegeben. Dann ist W topologisch isomorph zu X/E: $W \cong X/E$.*

Beweis: Mit P ist auch $I - P$ stetig mit $\|I - P\| \le \|P\| + 1$, denn $\|(I-P)x\| = \|x - Px\| \le \|x\| + \|Px\| \le \|x\| + \|P\|\|x\| = (1 + \|P\|)\|x\|$. Setze nun $M := 2\|P\| + 1$ (≥ 3, da $\|P\| \ge 1$). Für beliebige $e \in E$ und $w \in W$ gilt dann

$$M^{-1}(\|e\| + \|w\|) \le \|e + w\| \le \|e\| + \|w\|.$$

Ist nämlich $x = e + w$, dann gilt $\|e\| + \|w\| = \|Px\| + \|(I-P)x\| \le M\|x\| = M\|e + w\|$. Definiere $\Psi : W \to X/E$, $w \longmapsto [w] = w + E$. Ψ ist injektiv, und ist $x \in X$, dann gilt $\Psi(x - Px) = x - Px + E = x + E$, da $Px \in E$. Somit ist Ψ bijektiv. Ψ ist auch stetig: $\|\Psi w\| = \|w + E\| = \inf\{\|w - e\| : e \in E\} \le \|w - 0\| = \|w\|$. Es ist $\Psi^{-1}([x]) = x - Px$. Zu beliebigem $x \in X$ setze nun $w = x - Px$. Dann ist $[x] = [w]$ und $\|\Psi^{-1}[x]\| = \|\Psi^{-1}[w]\| = \|w\| \le \|-e\| + \|w\| \le M\|w - e\|$ für alle $e \in E$. Mit Infimumbildung über alle $e \in E$ folgt $\|\Psi^{-1}[x]\| \le M\|[w]\| = M\|[x]\|$. □

Bemerkung: (a) Ist X ein Banachraum, so auch E, W und X/E. Die Stetigkeit der Inversen Ψ^{-1} aus dem Beweis von Korollar 2.5 ergibt sich dann sofort aus dem Satz von der offenen Abbildung.
(b) Die Umkehrung von Satz 2.3 gilt nicht! Ist $X = E \oplus W$ mit abgeschlossenen E und W, dann gibt es zwar eine lineare Projektion von X auf E; diese muss aber nicht stetig sein. Wenn man das Ergebnis aus Korollar 2.5 als weitere Voraussetzung hinzunimmt, kann man jedoch zurückschließen.

Satz 2.6 *Es sei X ein normierter Vektorraum. Gibt es abgeschlossene lineare Unterräume E und W, so dass $X = E \oplus W$ und ist W auf natürliche Weise topologisch isomorph zu X/E, dann gibt es eine stetige lineare Projektion von X auf E.*

Beweis: Sei $\Psi : W \to X/E$, $w \longmapsto [w]$, der natürliche algebraische Isomorphismus von W auf den Quotientenraum X/E. Nach Voraussetzung ist dieser auch ein topologischer Isomorphismus. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar $e \in E$ und $w \in W$, so dass $x = e + w$. Definiere $Px := e$. P ist zweifelsohne eine lineare Projektion auf E. Für $x = e + w$ gilt dann $\|Px\| = \|e\| = \|(e + w) + (-w)\| \le \|e + w\| + \|w\| = \|x\| + \|\Psi^{-1}[w]\| \le$

$\|x\| + \|\Psi^{-1}\|\|[w]\| = \|x\| + \|\Psi^{-1}\| \inf\{\|w - e'\| : e' \in E\} \leq \|x\| + \|\Psi^{-1}\|\|w - (-e)\| = (1 + \|\Psi^{-1}\|)\|x\|$. □

Ist X nun ein Banachraum, so kann man die zusätzliche Voraussetzung in Satz 2.6 wegfallen lassen.

Korollar 2.7 *Es sei X ein Banachraum und $E \subseteq X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Eine stetige lineare Projektion P von X auf E existiert genau dann, wenn $X = E \oplus W$ mit einem abgeschlossenen linearen Unterraum W.*

Beweis: Die Richtung „$\longrightarrow$“ haben wir bereits in Satz 2.3 gezeigt. Sei nun $X = E \oplus W$ mit einem abgeschlossenen linearen Unterraum $W \subseteq X$. Setze $\Psi : W \to X/E$, $w \longmapsto [w]$. Ψ ist injektiv. Ist $[x] \in X/E$ mit $x \in X$, $x = e+w$. Dann ist $x-w = e \in E$, also $[x] = [w]$ bzw. $\Psi(w) = [w] = [x]$. Somit ist Ψ bijektiv und wegen $\|\Psi(w)\| = \|[w]\| = \inf\{\|w - e\| : e \in E\} \leq \|w - 0\| = \|w\|$ auch stetig. Dass auch Ψ^{-1} stetig ist, folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung. □

2.2 Dimensionen von Quotientenräumen

Satz 2.8 *Es sei X ein Vektorraum und $W \subseteq X$ ein linearer Unterraum in X. Ist* $\dim X/W < \infty$*, so gibt es einen linearen Unterraum $E \subseteq X$ mit* $\dim E = \dim X/W < \infty$ *und $X = E \oplus W$.*

Beweis: Seien $x_1, \dots, x_n \in X$, so dass $\{[x_1], \dots, [x_n]\}$ eine Basis von X/W ist. Die x_i sind linear unabhängig, denn ist $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$, so folgt $\lambda_1[x_1] + \cdots + \lambda_n[x_n] = [\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n] = [0] = 0$, also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Setze $E := \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$. Ist nun $x \in X$, dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so dass $[x] = \lambda_1[x_1] + \cdots + \lambda_n[x_n]$. Das bedeutet, dass $x - (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) =: w \in W$, also $x = (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + w \in E + W$. Es folgt $X = E + W$. Diese Summe ist direkt: Sei $x \in E \cap W$, $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Dann folgt $\lambda_1[x_1] + \cdots + \lambda_n[x_n] = [\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n] = [x] = [0] = 0$, also $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Satz 2.9 *Es sei X ein Vektorraum und $E, W \subseteq X$ lineare Unterräume mit* $\dim E < \infty$*, so dass $X = E \oplus W$. Dann ist* $\dim X/W = \dim E < \infty$.

Beweis: Es sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von E. Wir zeigen, dass dann $\{[e_1], \dots, [e_n]\}$ eine Basis von X/W ist. Setze dazu $\lambda_1[e_1] + \cdots + \lambda_n[e_n] = [0]$. Dann folgt $[\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n] =$

$[0]$. Das bedeutet aber $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in W$, also $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, woraus wiederum $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ folgt. Sei nun $[x] \in X/W$ mit $x = e + w$. Dann ist $x - e = w \in W$, also $[x] = [e]$. Sei $e = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Dann gilt $[x] = [e] = [\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n] = \lambda_1[e_1] + \cdots + \lambda_n[e_n] \in \text{lin}\{[e_1], \ldots, [e_n]\}$. □

Satz 2.10 *Es sei X ein normierter Vektorraum und $M, N \subseteq X$ lineare Unterräume mit $M \subseteq N$. Dann gilt*

(i) $\dim X/N \leq \dim X/M$.

(ii) $\dim N/M \leq \dim X/M$

Beweis: Ist $\dim X/M = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\dim X/M < \infty$. Nach Satz 2.8 gibt es dann einen linearen Unterraum $E \subseteq X$, so dass $\dim E = \dim X/M < \infty$ und $X = M \oplus E$. Sei $X_0 = N \cap E$. Dann ist $\dim X_0 < \infty$, und nach Korollar 2.4 existieren wiederum lineare Unterräume $X_1, X_2 \subseteq X$, so dass

$$\begin{aligned} N &= X_0 \oplus X_1 \\ E &= X_0 \oplus X_2. \end{aligned}$$

Dabei ist $\dim X_2 \leq \dim E$. Es ist $N \cap X_2 = \{0\}$, denn ist $x \in N \cap X_2$, so ist auch $x \in N \cap E = X_0$, also $x \in X_0 \cap X_2 = \{0\}$. Wegen $M \subseteq N$ ist $X = M \oplus E = N + E$. Daraus folgt aber $X = N \oplus X_2$, denn ist $x \in X = N + E$, dann existieren $x_0, x_0' \in X_0$, $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$, so dass $x = (x_0 + x_1) + (x_0' + x_2) = ((x_0 + x_0') + x_1) + x_2 \in (X_0 \oplus X_1) \oplus X_2 = N \oplus X_2$. Mit Satz 2.9 folgt $\dim X/N = \dim X_2 \leq \dim E = \dim X/M$. Es ist $M \cap X_0 = \{0\}$, denn $M \cap X_0 \subseteq M \cap E = \{0\}$. Wir zeigen nun $N = M \oplus X_0$. Dann folgt $\dim N/M = \dim X_0 \leq \dim E = \dim X/M$. Wegen $M \subseteq N$ und $X_0 \subseteq N$ folgt sofort $M \oplus X_0 \subseteq N$. Es sei nun $x \in N$, $x = m + e$ mit $m \in M$ und $e \in E$. Zu e gibt es wieder $x_0 \in X_0$ und $x_2 \in X_2$, so dass $e = x_0 + x_2$. Dann ist aber $X_2 \ni x_2 = e - x_0 = x - m - x_0 \in N$, woraus $e = x_0$ und damit $x = m + x_0 \in M \oplus X_0$ folgt. □

Nun wollen wir noch ein Analogon zu Lemma 2.2 mit endlich-kodimensionalen Unterräumen formulieren und beweisen.

Satz 2.11 *Es sei X ein normierter Vektorraum und $W \subseteq X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum mit $n := \dim X/W < \infty$. Dann gibt es eine stetige lineare Projektion $P : X \to W$ mit $\|P\| \leq 3^n$.*

Beweis: Für $n = 0$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Sei nun $n = 1$. Nach Satz 2.8 gibt es dann einen Vektor $x_0 \in X$, so dass $X = \text{lin}\{x_0\} \oplus W$. Nach dem Rieszschen Lemma kann x_0 so gewählt werden, dass $\|x_0\| = 1$ und $\text{dist}(x_0, W) \geq 1/2$. Definiere nun die Projektion $P : X \to W$ durch $P(\lambda x_0 + w) := w$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $w \in W$. Wir müssen nun $\|w\| \leq 3\|\lambda x_0 + w\|$ beweisen für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $w \in W$. Für $\lambda = 0$ ist dies offensichtlich richtig. Für $\lambda \neq 0$ ist das gleichwertig zu $\|w\| \leq 3\|x_0 + w\|$ für alle $w \in W$. Ist $\|w\| \leq 3/2$, so folgt $\|w\| \leq 3 \cdot 1/2 \leq 3\|x_0 + w\|$. Und für $\|w\| > 3/2$ gilt $3\|w + x_0\| \geq 3\|w\| - 3\|x_0\| = 3\|w\| - 3 = \|w\| + 2\|w\| - 3 \geq \|w\|$. Den Rest zeigen wir mit vollständiger Induktion über n. Sei die Behauptung für ein $n \geq 0$ bereits bewiesen und $\dim X/W = n + 1$. Nach Satz 2.8 gibt es Vektoren $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$, so dass $X = \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \oplus W$. Dann ist aber auch $X = \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \oplus W'$, wobei $W' = \mathrm{lin}\{x_{n+1}\} \oplus W$. Nach Satz 2.9 ist $\dim X/W' = n$, und wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden. Demnach gibt es eine stetige lineare Projektion $P_0 : X \to W'$ mit $\|P_0\| \leq 3^n$. Betrachte nun W als linearen Unterraum von W'. Wieder nach Satz 2.9 ist $\dim W'/W = 1$. Nach obigen Überlegungen gibt es eine lineare stetige Projektion $P_1 : W' \to W$ mit $\|P_1\| \leq 3$. Definiere nun $P := P_1 P_0$. Wegen $P_0 P_1 = P_1$ ist $P^2 = P_1 P_0 P_1 P_0 = P_1^2 P_0 = P_1 P_0 = P$. P ist also eine stetige lineare Projektion von X auf W mit $\|P\| = \|P_1 P_0\| \leq \|P_1\|\|P_0\| \leq 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. □

2.3 Etwas lineare Algebra

Satz 2.12 *Es seien X und Y Vektorräume, $W \subseteq Y$ ein linearer Unterraum und $S : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim S^{-1}(W) = \dim N(S) + \dim(W \cap R(S)).$$

Beweis: Betrachte die Abbildung

$$S' : S^{-1}(W) \to W \cap R(S)\,,\ S'x = Sx.$$

Diese ist surjektiv, denn ist $w \in W \cap R(S)$, dann gibt es ein $x \in X$ mit $Sx = w$. Wegen $w \in W$ ist dann $x \in S^{-1}(W)$, und es folgt $S'x = Sx = w$. Weiter gilt $N(S') = N(S)$, denn ist $S'x = 0$, so ist auch $Sx = S'x = 0$, und ist $Sx = 0 \in W$, so ist $x \in S^{-1}(W)$ und $S'x = Sx = 0$. Ist $\dim N(S) = \infty$, dann ist wegen $N(S) = N(S') \subseteq S^{-1}(W)$ auch $S^{-1}(W)$ unendlichdimensional. Ist $W \cap R(S)$ unendlichdimensional, so ist dies auch $S^{-1}(W)$, denn wäre $\dim S^{-1}(W) < \infty$, $S^{-1}(W) = \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, dann folgte $W \cap R(S) = R(S') = S'(\mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}) = \mathrm{lin}\{S'x_1, \ldots, S'x_n\}$, also ein Widerspruch. In den Fällen $\dim N(S) = \infty$ oder $\dim(W \cap R(S)) = \infty$ ist die Behauptung also wahr. Sei nun $\dim N(S) < \infty$ und $\dim(W \cap R(S)) < \infty$. Dann folgt mit der Dimensionsformel: $\dim S^{-1}(W) = \dim N(S') + \dim R(S') = \dim N(S) + \dim(W \cap R(S))$. □

Korollar 2.13 *Es seien X, Y, Z Vektorräume und $S_1 : X \to Y$, $S_2 : Y \to Z$ lineare Abbildungen. Dann gilt:*

$$\dim N(S_2 S_1) = \dim N(S_1) + \dim(N(S_2) \cap R(S_1)).$$

Beweis: Es ist $N(S_2 S_1) = S_1^{-1}(N(S_2))$. Also folgt $\dim N(S_2 S_1) = \dim S_1^{-1}(N(S_2)) = \dim N(S_1) + \dim(N(S_2) \cap R(S_1))$. □

2.4 Affine Unterräume

Lemma 2.14 *Es sei X ein Vektorraum und $N \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Gibt es $u, u' \in X$ und einen weiteren linearen Unterraum $N' \subseteq X$, so dass $u' + N' = u + N$, dann ist $N' = N$.*

Beweis: Es ist $u' + 0 \in u + N$, also gibt es ein $e \in N$, so dass $u' = u + e$. Es folgt $N' = (u - u') + N = (u - (u + e)) + N = -e + N = N$. □

Definition: *Für einen Vektorraum X, einen linearen Unterraum $N \subseteq X$ und $u \in X$ nennen wir die Menge $u + N$ einen affinen Unterraum und definieren*

$$\dim(u + N) := \dim N.$$

Diese Definition ist mit Lemma 2.14 sinnvoll.

Lemma 2.15 *Sei X ein Vektorraum, $u + N \subseteq X$ ein affiner Unterraum und $V \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Dann ist entweder $(u + N) \cap V = \emptyset$ oder es gibt ein $v_0 \in V$, so dass $(u + N) \cap V = v_0 + (N \cap V)$.*

Beweis: Sei $(u + N) \cap V \neq \emptyset$. Dann wähle $v_0 \in (u + N) \cap V$. Es gibt insbesondere ein $e_0 \in N$, so dass $v_0 = u + e_0$. Ist nun $x \in (u + N) \cap V$, dann gibt es $e \in N$, so dass $x = u + e$ und $x - v_0 \in V$, $x - v_0 = x - (u + e_0) = (x - u) - e_0 = e - e_0 \in N$, also $x - v_0 \in N \cap V$ bzw. $x \in v_0 + (N \cap V)$. Sei andersherum $x \in v_0 + (N \cap V)$. Wegen $v_0 \in V$ ist $x \in V$, und da $v_0 \in u + N$, folgt $x \in v_0 + (N \cap V) \subseteq u + N + (N \cap V) \subseteq u + N$. □

3 Semi-Fredholm-Operatoren

3.1 Einführung

Definition: *Es seien X und Y Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Die Zahlen*

$$\mathrm{nul}(T) := \dim N(T) \quad \text{und} \quad \mathrm{def}(T) := \dim Y/R(T)$$

nennen wir Nulldefekt (nullity) und Bilddefekt (deficiency) von T. Ist wenigstens eine dieser Zahlen endlich, so erklären wir den Index von T durch

$$\mathrm{ind}(T) := \mathrm{nul}(T) - \mathrm{def}(T).$$

Mit dieser Definition können wir bereits ein für die Fredholmtheorie fundamentales Theorem beweisen.

Satz 3.1 (Indextheorem) *Es seien X, Y und Z normierte Vektorräume, und die Abbildungen $S : X \to Y$ und $T : Y \to Z$ seien linear. Weiter seien $\mathrm{nul}(S), \mathrm{def}(S)$ und $\mathrm{nul}(T)$ endlich. Dann gilt*

(i) $\mathrm{nul}(TS) < \infty$
(ii) $\mathrm{def}(TS) < \infty \Longleftrightarrow \mathrm{def}(T) < \infty$
(iii) $\mathrm{ind}(TS) = \mathrm{ind}(T) + \mathrm{ind}(S)$

Beweis: Es sei $Y_0 := R(S) \cap N(T) \subseteq Y$. Es ist $\dim Y_0 < \infty$. Aus Korollar 2.13 folgern wir unmittelbar

$$\mathrm{nul}(TS) = \mathrm{nul}(S) + \dim Y_0. \tag{1}$$

Damit ist bereits (i) gezeigt. Ist $\mathrm{def}(T) = \infty$, so folgt aus $R(TS) \subseteq R(T)$ mit Satz 2.10: $\mathrm{def}(TS) = \dim Z/R(TS) \geq \dim Z/R(T) = \mathrm{def}(T) = \infty$, also auch $\mathrm{def}(TS) = \infty$ und $\mathrm{ind}(TS) = -\infty = \mathrm{ind}(T) + \mathrm{ind}(S)$. Sei nun $\mathrm{def}(T) < \infty$. Da $\dim Y_0 < \infty$, existieren nach Korollar 2.4 (abgeschlossene) lineare Unterräume $Y_1, Y_2 \subseteq Y$, so dass

$$\begin{aligned} R(S) &= Y_0 \oplus Y_1 \\ N(T) &= Y_0 \oplus Y_2. \end{aligned}$$

Es ist $R(S) \cap Y_2 = \{0\}$, denn ist $y \in R(S) \cap Y_2$, dann ist auch $y \in R(S) \cap N(T) = Y_0$, also $y \in Y_0 \cap Y_2 = \{0\}$. Wegen $R(S) \subseteq R(S) \oplus Y_2$ gilt $\dim Y/(R(S) \oplus Y_2) \leq \dim Y/R(S) = \mathrm{def}(S) < \infty$. Nach Satz 2.8 existiert somit ein weiterer linearer Unterraum $Y_3 \subseteq Y$, so dass

$$Y = R(S) \oplus Y_2 \oplus Y_3 \tag{$*$}$$

Natürlich ist auch $\dim Y_3 < \infty$, und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{nul}(T) &= \dim Y_0 + \dim Y_2 && (2)\\ \mathrm{def}(S) &= \dim Y_2 + \dim Y_3. && (3) \end{aligned}$$

Im folgenden zeigen wir

$$\mathrm{def}(TS) = \mathrm{def}(T) + \dim Y_3. \tag{4}$$

Wenden wir T auf $(*)$ an, so folgt $R(T) = R(TS) + TY_3$. Diese Summe ist direkt: Es sei $z = TSx = Ty_3$ mit $x \in X$ und $y_3 \in Y_3$. Setze $y = Sx$. Es gibt nun $y_0 \in Y_0$ und $y_1 \in Y_1$, so dass $y = y_0 + y_1$, und es folgt $Ty_1 = Ty_3$, also $y_3 - y_1 \in N(T)$. Somit existieren wieder $y_0' \in Y_0$ und $y_2 \in Y_2$, so dass $y_3 - y_1 = y_0' + y_2 \Longleftrightarrow Y_3 \ni y_3 = (y_0' + y_1) + y_2 \in R(S) \oplus Y_2$, also $y_3 = 0$ und damit $z = Ty_3 = 0$. Damit ist

$$R(T) = R(TS) \oplus TY_3. \tag{5}$$

Aus der Dimensionsformel der linearen Algebra folgern wir noch $\dim Y_3 = \dim N(T|Y_3) + \dim TY_3 = \dim TY_3$. Da $\mathrm{def}(T) < \infty$, existiert ein linearer Unterraum $Z_0 \subseteq Z$, so dass $Z = R(T) \oplus Z_0$ und $\dim Z_0 = \mathrm{def}(T) < \infty$. Mit (5) folgt $Z = R(TS) \oplus (TY_3 \oplus Z_0)$ und damit und Satz 2.9 wiederum (4). (4) zeigt insbesondere, dass $\mathrm{def}(TS) < \infty$, wenn $\mathrm{def}(T) < \infty$. Mit (1)-(4) folgt nun

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(TS) &= \mathrm{nul}(TS) - \mathrm{def}(TS)\\ &= \mathrm{nul}(S) + \dim Y_0 - \mathrm{def}(T) - \dim Y_3\\ &= (\mathrm{nul}(S) - \dim Y_2 - \dim Y_3) + (\dim Y_0 + \dim Y_2 - \mathrm{def}(T))\\ &= (\mathrm{nul}(S) - \mathrm{def}(S)) + (\mathrm{nul}(T) - \mathrm{def}(T))\\ &= \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T), \end{aligned}$$

also (iii). □

Lemma 3.2 *Es seien X und Y Banachräume, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ und $Y = R(T) \oplus Y_0$ mit einem abgeschlossenen linearen Unterraum $Y_0 \subseteq Y$. Dann ist $R(T)$ abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $\widetilde{T} : X/N(T) \to Y,\ \widetilde{T}[x] := Tx$ für $x \in X$. Damit definiere wiederum die lineare Abbildung $S : X/N(T) \times Y_0 \to Y$ durch $S([x], y) := \widetilde{T}[x] + y$. $\widetilde{T}$ ist bijektiv, und wegen der Art der Zerlegung von Y ist auch S injektiv. Weiterhin ist S stetig, denn für alle $x \in X$, $y \in Y_0$ und $e \in N(T)$ gilt

$$\|S([x], y)\| = \|Tx + y\| = \|T(x - e) + y\| \le \|T\|\|x - e\| + \|y\| \,,$$

und mit Infimumbildung über alle $e \in N(T)$

$$\|S([x], y)\| \le \|T\|\|[x]\| + \|y\| \le \max\{\|T\|, 1\} \cdot \|([x], y)\| \,.$$

Da $R(S) = R(T) \oplus Y_0 = Y$, ist $R(S)$ abgeschlossen und S somit stetig invertierbar. Es existiert also ein $c > 0$, so dass $\|\widetilde{T}[x]+y\| = \|S([x],y)\| \geq c(\|[x]\|+\|y\|)$. Speziell für $y = 0$: $\|\widetilde{T}[x]\| \geq c\|[x]\|$, was bedeutet, dass $\widetilde{T}$ stetig invertierbar ist, also ein abgeschlossenes Bild hat. Das ist aber die Behauptung, denn $R(T) = R(\widetilde{T})$. □

Satz 3.3 (Satz von Kato) *Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathscr{C}(X,Y)$. Ist $\dim Y/R(T) < \infty$, dann ist $R(T)$ abgeschlossen.*

Beweis: Setze $X_0 = (D(T), \|\cdot\|_T)$, wobei $\|\cdot\|_T$ die Graphennorm bezüglich T sei. Es sei weiter $A : X_0 \to Y$, $Ax := Tx$. Dann ist X_0 ein Banachraum, $A \in \mathscr{B}(X_0, Y)$ und $R(A) = R(T)$. Weiter gibt es nach Satz 2.8 einen linearen Unterraum $Y_0 \subseteq Y$ mit $\dim Y_0 = \dim Y/R(A)$ und $Y = R(A) \oplus Y_0$. Y_0 ist als endlichdimensionaler linearer Unterraum abgeschlossen, und die Behauptung folgt mit Lemma 3.2. □

Es ist nun an der Zeit, die in diesem Vortrag zu behandelnden Operatorklassen einzuführen. Für normierte Vektorräume X und Y definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned}
\Phi_+(X,Y) &:= \{T \in \mathscr{C}(X,Y) : \mathrm{nul}(T) < \infty\,,\ R(T) \text{ ist abgeschlossen}\} \\
\Phi_-(X,Y) &:= \{T \in \mathscr{C}(X,Y) : \mathrm{def}(T) < \infty\,,\ R(T) \text{ ist abgeschlossen}\} \\
\Phi(X,Y) &:= \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y).
\end{aligned}$$

$\Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y)$ nennen wir die Menge der Semi-Fredholm-Operatoren, und die Operatoren aus $\Phi(X,Y)$ Fredholm-Operatoren. Ist Y ein Banachraum, dann ist die Bedingung, dass $R(T)$ abgeschlossen ist in der Definition von $\Phi_-(X,Y)$ nach Satz 3.3 überflüssig. Die Menge der stetigen Operatoren aus jeweils einer der drei obigen Mengen indizieren wir mit einem „s", also z.B. $\Phi_+^s(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cap \mathscr{B}(X,Y)$.

Folgenden Satz wollen wir hier nicht beweisen. Es wäre zu aufwendig. Jedoch wird er uns helfen, für die Aussagen über Semi-Fredholm-Operatoren nur eine der beiden Klassen verwenden zu müssen.

Satz 3.4 (Satz vom abgeschlossenen Bild) *Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathscr{C}(X,Y)$ dicht definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$R(T)$ ist abgeschlossen*
(ii) $R(T) = {}^{\perp}N(T')$
(iii) *$R(T')$ ist abgeschlossen*
(iv) $R(T') = N(T)^{\perp}$ □

Dabei sind ${}^\perp\cdot$ und $\cdot^\perp$ die folgenden Annihilatoren

$$M \subseteq X \Longrightarrow M^\perp = \{x' \in X' : x'(x) = 0 \ \forall x \in M\}$$
$$N \subseteq X' \Longrightarrow {}^\perp N = \{x \in X : x'(x) = 0 \ \forall x' \in N\}.$$

Auch das folgende Lemma sei unbewiesen. Man findet es in jedem guten Buch zur Funktionalanalysis.

Lemma 3.5 *Es sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt:*
(i) $(X/M)' \cong M^\perp$
(ii) $X'/M^\perp \cong M'$.

„$\cong$" bedeutet dabei „isometrisch isomorph". □

Sei nun $T \in \mathscr{C}(X, Y)$ mit Banachräumen X und Y. Ist $R(T) \subseteq Y$ abgeschlossen, dann gilt $\mathrm{nul}(T) = \dim N(T) = \dim N(T)' = \dim X'/N(T)^\perp = \dim X'/R(T') = \mathrm{def}(T')$. Wegen $N(T') = \{y' \in Y' : T'y' = 0\} = \{y' \in Y' : y'(Tx) = 0 \ \forall x \in D(T)\} = \{y' \in Y' : y'(y) = 0 \ \forall y \in R(T)\} = R(T)^\perp$ gilt auch $\mathrm{nul}(T') = \dim N(T') = \dim R(T)^\perp = \dim(Y/R(T))' = \dim Y/R(T) = \mathrm{def}(T)$. Dieses Ergebnis fassen wir in folgenden Satz zusammen.

Satz 3.6 *Es seien X und Y Banachräume. Dann gilt*
(i) $T \in \Phi_+(X, Y) \Longleftrightarrow T' \in \Phi_-(Y', X')$
(ii) $\mathrm{nul}(T) = \mathrm{def}(T')$
(iii) $T \in \Phi_-(X, Y) \Longleftrightarrow T' \in \Phi_+(Y', X')$
(iv) $\mathrm{def}(T) = \mathrm{nul}(T')$. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch einen für unsere Zwecke wichtigen Satz beweisen. Dazu brauchen wir aber folgende zwei Lemmata.

Lemma 3.7 *Es sei X ein normierter Vektorraum und $M, N \subseteq X$ abgeschlossene lineare Unterräume mit* $\dim N < \infty$. *Dann ist $M + N$ abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $n := \dim N$. Es reicht, die Behauptung für $n = 1$ zu beweisen. Der Rest folgt durch Induktion. Sei $e \in N \setminus \{0\}$. Ist $e \in M$, so ist $N \subseteq M$ und die Aussage klar. Ist $e \notin M$, so ist $d := \mathrm{dist}(e, M) > 0$, da M abgeschlossen ist. Für $x = x^M + \lambda e$ mit $x^M \in M$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$|\lambda| \leq \|x\| \cdot d^{-1},$$

denn $|\lambda|^{-1}\|x\| = \|\lambda^{-1}x^M + e\| \geq d$ für $\lambda \neq 0$. Sei nun $x_n \longrightarrow x \in X$, $x_n = x_n^M + \lambda_n e \in M + N$. Aus $x_n - x_m = (x_n^M - x_m^M) + (\lambda_n - \lambda_m)e$ folgt dann $|\lambda_n - \lambda_m| \leq \|x_n - x_m\| d^{-1}$.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ der Grenzwert von (λ_n). Dann folgt $x_n^M = x_n - \lambda_n e \longrightarrow x - \lambda e =: x^M$. Da M abgeschlossen ist, ist $x^M \in M$ und damit $x = x^M + \lambda e \in M + N$. □

Lemma 3.8 *Es seien X und Y Banachräume und $T \in \mathscr{C}(X,Y)$. Ist $R(T)$ abgeschlossen und T injektiv, dann ist $T^{-1} : R(T) \to X$ stetig: $T^{-1} \in \mathscr{B}(R(T), X)$.*

Beweis: Da T^{-1} auf ganz $R(T)$ definiert ist, reicht es nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen zu zeigen, dass T^{-1} abgeschlossen ist. Dazu sei $(y_n) \subseteq R(T)$ mit $y_n \longrightarrow y \in R(T)$ und $T^{-1}y_n \longrightarrow x \in X$. Setze $x_n = T^{-1}y_n$. Dann gilt $x_n \longrightarrow x$ und $Tx_n \longrightarrow y$. Da T abgeschlossen ist, folgt $x \in D(T)$ und $Tx = y$ bzw. $T^{-1}y = x$. Das zeigt die Abgeschlossenheit von T^{-1}. □

Satz 3.9 *Es seien X und Y Banachräume und $T \in \Phi_+(X,Y)$. Dann ist TM abgeschlossen für jeden abgeschlossenen linearen Unterraum $M \subseteq X$.*

Beweis: Da $\dim N(T) < \infty$, existiert ein abgeschlossener linearer Unterraum $W \subseteq X$, so dass $X = N(T) \oplus W$ und eine stetige Projektion P von X auf $N(T)$ mit Kern W. Setze dann $\widetilde{M} = (I-P)M \subseteq W$. Die Einschränkung $\widetilde{T}$ von T auf W ist injektiv und besitzt nach Lemma 3.8 eine stetige Inverse, die auf $R(T)$ definiert ist. Wegen $\widetilde{T}^{-1}T = I - P$ ist $\widetilde{T}\widetilde{M} = \widetilde{T}(I-P)M = \widetilde{T}\widetilde{T}^{-1}TM = TM$. Wir zeigen zunächst, dass $\widetilde{M}$ abgeschlossen ist. Sei dazu $w_n \in \widetilde{M}$ mit $w_n \longrightarrow w \in W$. Wegen $\widetilde{M} = (I-P)M \subseteq M + PM \subseteq M + N(T)$ und Lemma 3.7 ist $w \in M + N(T)$, $w = x + e$ mit $x \in M$ und $e \in N(T)$. Es folgt $(I-P)x = (I-P)(w-e) = w$, also $w \in \widetilde{M}$. Das zeigt die Abgeschlossenheit von $\widetilde{M}$. Sei nun $\widetilde{T}w_n \longrightarrow y$ mit $w_n \in \widetilde{M}$. Dann ist $y \in R(T)$ und $w_n \longrightarrow \widetilde{T}^{-1}y =: w \in \widetilde{M}$. Es folgt $y = \widetilde{T}w \in \widetilde{T}\widetilde{M}$. □

3.2 Störungssätze

In diesem Abschnitt seien X und Y stets Banachräume.

Definition: *Für $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ setze*

$$\gamma(A) := \inf\left\{ \frac{\|Ax\|}{\operatorname{dist}(x, N(A))} : \ x \in X \setminus N(A) \right\}.$$

Lemma 3.10 *Für $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ ist $\gamma(A) > 0$ genau dann, wenn $R(A)$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Setze $\widetilde{X} = X/N(A)$ und $\widetilde{A} : \widetilde{X} \to Y$, $\widetilde{A}[x] := Ax$. Dann ist $\widetilde{A} \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, Y)$ injektiv, und $R(\widetilde{A}) = R(A)$. Mit Lemma 3.8 gilt

$$R(A) \text{ abgeschlossen} \iff R(\widetilde{A}) \text{ abgeschlossen} \iff \widetilde{A}^{-1} \in \mathscr{B}(R(\widetilde{A}), \widetilde{X}).$$

Dies ist dazu äquivalent, dass es $m > 0$ gibt, so dass $\|\widetilde{A}^{-1}y\| \le m^{-1}\|y\|$ für alle $y \in R(\widetilde{A})$. Das ist aber wieder gleichbedeutend mit der Existenz eines $m > 0$, so dass $m\|[x]\| \le \|\widetilde{A}[x]\| = \|Ax\|$ für alle $x \in X$. Und da $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, N(A))$, folgt daraus die Behauptung. □

Korollar 3.11 *Ist $A \in \mathscr{B}(X,Y)$, $R(A)$ abgeschlossen und A injektiv, dann ist*

$$\gamma(A) = 1/\|A^{-1}\| > 0.$$

Beweis: Nach Lemma 3.8 ist $A^{-1} \in \mathscr{B}(R(A), X)$. Damit folgt $\gamma(A) = \inf_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\| = (\sup_{x\neq 0} \|x\|/\|Ax\|)^{-1} = (\sup_{y \neq 0} \|A^{-1}y\|/\|y\|)^{-1} = (\sup_{\|y\|=1} \|A^{-1}y\|)^{-1} = 1/\|A^{-1}\|$. □

Lemma 3.12 *Es sei $A \in \Phi^s(X,Y)$ injektiv, $n := \operatorname{def}(A)$ und $S \in \mathscr{B}(X,Y)$ mit $\|S\| < 3^{-n}\gamma(A)$. Dann gilt*
(i) $A + S \in \Phi^s(X,Y)$
(ii) $\operatorname{nul}(A+S) = 0$
(iii) $\operatorname{def}(A+S) = \operatorname{def}(A)$

Beweis: Nach Satz 2.11 existiert eine stetige lineare Projektion P von Y auf $R(A)$ mit $\|P\| \le 3^n$. Da $R(A)$ abgeschlossen, ist $A^{-1} : R(A) \to X$ stetig, und wegen $PA = A$ gilt

$$A + S = (I_Y + SA^{-1}P)A.$$

Weiter haben wir die Abschätzung

$$\|SA^{-1}P\| \le \|S\|\|A^{-1}\|\|P\| < 3^{-n}\gamma(A)\|A^{-1}\|3^n = 1.$$

Damit folgt (ii), da $I_Y + SA^{-1}P$ bijektiv ist. Mit Satz 3.1 folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{def}(A+S) &= -\operatorname{ind}(A+S)\\ &= -\operatorname{ind}(I_Y + SA^{-1}P) - \operatorname{ind}(A)\\ &= -\operatorname{ind}(A)\\ &= \operatorname{def}(A).\end{aligned}$$

Das zeigt (iii). Zu (i) zeigen wir nun, dass $I_Y + SA^{-1}P$ eine stetige Inverse besitzt. Ist nämlich $(z_n) \subseteq Y$ mit $z_n \longrightarrow 0$ und $y_n = (I_Y + SA^{-1}P)^{-1}z_n$, dann folgt $\|z_n\| = \|y_n + SA^{-1}Py_n\| \geq \|y_n\| - \|SA^{-1}Py_n\| \geq (1 - \|SA^{-1}P\|)\|y_n\|$. □

Lemma 3.13 *Es sei V ein abgeschlossener linearer Unterraum von Y und $J : V \to Y$ seine Einbettung in Y. Für jedes $S \in \mathscr{B}(V, Y)$ mit $\|S\| < 1$ gilt dann*

(i) $J - S \in \Phi_+^s(V, Y)$
(ii) $\operatorname{nul}(J - S) = 0$
(iii) $\operatorname{def}(J - S) = \dim Y/V$.

Beweis: Für $\lambda \in [0, 1]$ setze $A_\lambda := J - \lambda S$. Für jedes $y \in V$, $\|y\| = 1$, gilt:

$$\|A_\lambda y\| = \|y - \lambda Sy\| \geq \|y\| - |\lambda|\|Sy\| \geq 1 - \|Sy\| \geq 1 - \|S\| > 0.$$

Daraus folgt, dass A_λ injektiv ist für alle $\lambda \in [0, 1]$. Insbesondere gilt (ii). $R(A_\lambda)$ ist für alle $\lambda \in [0, 1]$ abgeschlossen wegen

$$\gamma(A_\lambda) = \inf_{y \neq 0} \|A_\lambda y\|/\|y\| = \inf_{y \neq 0} \left\| A_\lambda \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \geq 1 - \|S\| > 0.$$

Daraus folgt (i). Es bleibt, (iii) zu zeigen. Dazu nehmen wir an, es gäbe ein $\mu \in [0, 1]$ mit $n = \operatorname{def}(A_\mu) < \infty$. Mit $\delta := 1 - \|S\| > 0$ gilt dann für alle $\lambda \in [0, 1]$ mit $|\lambda - \mu| \leq 3^{-n}\delta$:

$$\|A_\lambda - A_\mu\| = |\lambda - \mu| \cdot \|S\| < 3^{-n}\delta \leq 3^{-n}\gamma(A_\mu).$$

Wenden wir Lemma 3.12 an, so haben wir $\operatorname{def}(A_\lambda) = \operatorname{def}(A_\mu + (A_\lambda - A_\mu)) = \operatorname{def}(A_\mu)$. Bedecken wir nun $[0, 1]$ mit endlich vielen Intervallen der Länge $3^{-n}\delta$, so sehen wir, dass $\operatorname{def}(A_\lambda) = \text{const}$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Daraus folgt dann $\operatorname{def}(J - S) = \operatorname{def}(A_1) = \operatorname{def}(A_0) = \operatorname{def}(J) = \dim Y/V$. Gibt es kein solches $\mu \in [0, 1]$, so ist $\operatorname{def}(A_\lambda) = \infty$ für alle $\lambda \in [0, 1]$, woraus wieder (iii) folgt. □

Wir kommen nun zu unserem großen Störungssatz, den wir in zwei Teilen beweisen werden. Wir beschränken uns hier auf abgeschlossene Operatoren in einem Banachraum X, denn wir sind auf Zusammenhänge zwischen Spektrum und Semi-Fredholm-Region solcher Operatoren aus. Die Semi-Fredholm-Region eines Operators $T \in \mathscr{C}(X)$ ist die Menge

$$\Delta_{SF}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ ist ein Semi-Fredholm-Operator}\}.$$

Folgender Satz zeigt unter anderem, dass $\Delta_{SF}(T)$ offen ist in $\mathbb{C}$.

Satz 3.14 *Es sei $T \in \Phi_+(X)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < \varepsilon$ folgende Aussagen gelten:*

(i) $T - \lambda \in \Phi_+(X)$
(ii) $\operatorname{nul}(T - \lambda) \le \operatorname{nul}(T)$
(iii) $\operatorname{def}(T - \lambda) \le \operatorname{def}(T)$
(iv) $\operatorname{ind}(T - \lambda) = \operatorname{ind}(T)$.

Beweis: Es sei $X_0 := (D(T), \|\cdot\|_T)$, wobei $\|\cdot\|_T$ die Graphennorm von T sei. X_0 ist ein Banachraum. Definiere $A : X_0 \to X$, $Ax := Tx$. Dann ist $A \in \mathscr{B}(X_0, X)$. Es sei $I_0 : X_0 \to X$ die Einbettung von X_0 in X. I_0 ist stetig: $\|I_0 x\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|x\|_T$. Insbesondere ist $\|I_0\| \le 1$. Man überlegt sich leicht, dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $\operatorname{nul}(T - \lambda) = \operatorname{nul}(A - \lambda I_0)$, $\operatorname{def}(T - \lambda) = \operatorname{def}(A - \lambda I_0)$ und $T - \lambda \in \Phi_+(X) \iff A - \lambda I_0 \in \Phi_+(X_0, X)$. Da $\dim N(A) < \infty$, existiert in X_0 ein abgeschlossener linearer Unterraum $W \subseteq X_0$, so dass $X_0 = N(A) \oplus W$. Es seien $\widetilde{A}$ und $\widetilde{I_0}$ die Einschränkungen von A bzw. I_0 auf W. $\widetilde{A}$ bildet W stetig bijektiv auf $R(A)$ ab und besitzt eine stetige Inverse $\widetilde{A}^{-1} : R(A) \to X_0$. Es ist $R(\widetilde{A}^{-1}) = W$ abgeschlossen, $\operatorname{nul}(\widetilde{A}^{-1}) = 0$ und $\operatorname{def}(\widetilde{A}^{-1}) = \dim X_0/W = \dim N(A) = \operatorname{nul}(A) < \infty$. Somit ist $\widetilde{A}^{-1} \in \Phi^s(R(A), X_0)$. Es sei nun J die Einbettung von $R(A)$ in X. Damit ist dann

$$A\widetilde{A}^{-1} = J. \qquad (R(A) \to X_0 \to X)$$

Daraus folgt

$$(A - \lambda I_0)\widetilde{A}^{-1} = J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1}. \qquad (*)$$

Ab jetzt sei stets $|\lambda| < 1/\|\widetilde{A}^{-1}\|$. Es gilt $\|\lambda I_0 \widetilde{A}^{-1}\| < 1$. Mit Lemma 3.13 folgt $J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1} \in \Phi_+^s(R(A), X)$, $\operatorname{nul}(J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1}) = 0$ und

$$\operatorname{def}(J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1}) = \operatorname{def}(A). \qquad (**)$$

Da $\operatorname{nul}(J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1}) = 0$, ist wegen $(*)$ auch $\widetilde{A} - \lambda \widetilde{I_0}$ injektiv bzw. $N(A - \lambda I_0) \cap W = \{0\}$. Damit folgt $N(A - \lambda I_0) \oplus W \subseteq X = N(A) \oplus W$, woraus wiederum $\operatorname{nul}(A - \lambda I_0) \le \operatorname{nul}(A)$ folgt. Das ist die Ungleichung (ii), die uns auch sogleich Satz 3.1 auf $(*)$ anwenden lässt:

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(A - \lambda I_0) &= -\operatorname{ind}(\widetilde{A}^{-1}) + \operatorname{ind}(J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1}) \\ &= \operatorname{nul}(A) - \operatorname{def}(A) \\ &= \operatorname{ind}(A). \end{aligned}$$

Das beweist (iv). Multiplizieren wir in $(*)$ von rechts mit $\widetilde{A}$, so folgt

$$\widetilde{A} - \lambda \widetilde{I_0} = (J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1})\widetilde{A}. \qquad (***)$$

Wegen $R(\widetilde{A}) = R(A)$ haben die beiden Operatoren

$$(J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1})\widetilde{A} : W \to X \quad \text{und} \quad J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1} : R(A) \to X$$

zusammenfallende Bildräume. Mit $(***)$ und $(**)$ folgt

$$\operatorname{def}(\widetilde{A} - \lambda \widetilde{I_0}) = \operatorname{def}(J - \lambda I_0 \widetilde{A}^{-1}) = \operatorname{def}(A).$$

Da aber $(\widetilde{A}-\lambda\widetilde{I_0})W \subseteq (A-\lambda I_0)X_0$, also $\operatorname{def}(A-\lambda I_0) \leq \operatorname{def}(\widetilde{A}-\lambda\widetilde{I_0})$, haben wir damit (iii) bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass $R(A-\lambda I_0)$ abgeschlossen ist in X. Es ist $(A-\lambda I_0)N(A) = I_0 N(A) = N(T)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} R(A-\lambda I_0) &= (A-\lambda I_0)N(A) + (\widetilde{A}-\lambda\widetilde{I_0})W \\ &= N(T) + (J-\lambda I_0\widetilde{A}^{-1})\widetilde{A}W \\ &= N(T) + (J-\lambda I_0\widetilde{A}^{-1})R(A) \\ &= N(T) + R(J-\lambda I_0\widetilde{A}^{-1}). \end{aligned}$$

Da $J-\lambda I_0\widetilde{A}^{-1} \in \Phi_+^s(R(A),X)$, folgt (i) mit Lemma 3.7. □

Satz 3.15 *Es sei $T \in \Phi_+(X)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\lambda| < \varepsilon$ folgende Aussagen gelten:*

(i) $T-\lambda \in \Phi_+(X)$

(ii) $\operatorname{nul}(T-\lambda) = \alpha = \text{const}$ *mit* $\alpha \leq \operatorname{nul}(T)$

(iii) $\operatorname{def}(T-\lambda) = \beta = \text{const}$ *mit* $\beta \leq \operatorname{def}(T)$

(iv) $\operatorname{ind}(T-\lambda) = \operatorname{ind}(T)$.

Beweis: (i) und (iv) haben wir bereits in Satz 3.14 bewiesen. Wir zeigen (ii). Wegen (iv) folgt dann auch (iii). Betrachte nun den Raum $\widetilde{X} := \bigcap_{n=1}^{\infty} R(T^n)$. Ist $x \in N(T-\lambda)$, $\lambda \neq 0$, so folgt $Tx = \lambda x \in D(T)$, also $T^2x = T(\lambda x) = \lambda^2 x$ usw. Induktiv ergibt sich $T^n x = \lambda^n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $x \in \widetilde{X}$. Es ist also $N(T-\lambda) \subseteq \widetilde{X}$. $\widetilde{X}$ ist nach Satz 3.9 ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Wir zeigen nun $T\widetilde{X} = \widetilde{X}$. Ist $x \in \widetilde{X} \cap D(T)$, also $x \in R(T^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $Tx \in T(R(T^n)) = R(T^{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $Tx \in \widetilde{X}$. Sei nun $x \in \widetilde{X}$. Wir müssen zeigen, dass es dann ein $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ gibt, so dass $T\widetilde{x} = x$ bzw. $\widetilde{x} \in T^{-1}\{x\}$. Mit anderen Worten: $T^{-1}\{x\} \cap \widetilde{X} \neq \emptyset$. Aus $x \in \widetilde{X}$ folgt insbesondere $x \in R(T)$. D.h., es gibt $u \in D(T)$, so dass $Tu = x$. Mit diesem u ist $T^{-1}\{x\} = \{v \in D(T) : Tv = Tu\} = \{v \in D(T) : v-u \in N(T)\} = u + N(T)$. $T^{-1}\{x\}$ ist also ein endlichdimensionaler affiner Unterraum. Die Mengen $T^{-1}\{x\} \cap R(T^n)$ sind nicht leer, denn $x \in R(T^{n+1})$, d.h., es existiert ein $\widetilde{x} \in R(T^n)$, so dass $x = T\widetilde{x} \Longleftrightarrow \widetilde{x} \in T^{-1}\{x\}$. Nach Lemma 2.15 sind all diese Mengen endlichdimensionale affine Unterräume. Wegen $X \supseteq R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq \ldots$ werden die Dimensionen dieser Räume höchstens kleiner. Daher existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $T^{-1}\{x\} \cap R(T^m) = T^{-1}\{x\} \cap R(T^{m+k})$ für alle $k = 0,1,\ldots$. Schneiden wir all diese Räume für $k = 0,1,\ldots$, so folgt $T^{-1}\{x\} \cap \widetilde{X} = T^{-1}\{x\} \cap R(T^m) \neq \emptyset$. Das beweist $T\widetilde{X} = \widetilde{X}$.

Es sei $\widetilde{T}$ die Einschränkung von T auf $\widetilde{X}$. Es ist $\widetilde{T} \in \mathscr{C}(\widetilde{X})$ und auch $\widetilde{T} \in \Phi_+(\widetilde{X})$, denn $R(\widetilde{T}) = \widetilde{X}$ und $N(\widetilde{T}) \subseteq N(T)$. Da $\widetilde{T}$ surjektiv ist, ist $\operatorname{def}(\widetilde{T}) = 0$. Wenden wir auf $\widetilde{T}$ Satz 3.14 an, so folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < \varepsilon$ gilt: $\widetilde{T}-\lambda \in \Phi_+(\widetilde{X})$, $\operatorname{nul}(\widetilde{T}-\lambda) \leq \operatorname{nul}(\widetilde{T})$, $\operatorname{def}(\widetilde{T}-\lambda) \leq \operatorname{def}(\widetilde{T}) = 0$, also $\operatorname{def}(\widetilde{T}-\lambda) = 0$, und $\operatorname{ind}(\widetilde{T}-\lambda) = \operatorname{ind}(\widetilde{T})$. Damit ist aber $\operatorname{nul}(T-\lambda) = \operatorname{nul}(\widetilde{T}-\lambda) = \operatorname{ind}(\widetilde{T}-\lambda) = \operatorname{ind}(\widetilde{T}) = \operatorname{nul}(\widetilde{T}) = \text{const}$ für $0 < |\lambda| < \varepsilon$. □

Verwendete Literatur

[1] S. R. CARADUS, W. E. PFAFFENBERGER, BERTRAM YOOD. *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1974

[2] TOSIO KATO. *Pertubation Theory for Linear Operators*, Springer, 2. Auflage, 1980

[3] D. WERNER, *Funktionalanalysis*, Springer, 4. Auflage, 2002