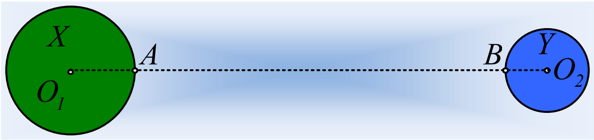
Ένα σύστημα δύο ουρανίων σωμάτων

Δυο σφαιρικά ουράνια σώματα αλληλεπιδρούν, στρεφόμενα γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους. Για τις ανάγκες της μελέτης μας, ας τα θεωρήσουμε ακίνητα σε απόσταση (διάκεντρος) D=190.000km, χωρίς να αλληλεπιδρούν με άλλα ουράνια σώματα.



Τα σώματα X και Y έχουν ακτίνες R_1=10.000km και R_2=4.000km αντίστοιχα, ενώ $GM_1=9\cdot 10^{14} m^3/s^2$ και $GM_2=64\cdot 10^{12} m^3/s^2$. Το σχήμα δεν έχει σχεδιαστεί υπό κλίμακα.

i) Να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια κάθε σώματος.

ii) Σε ποιο σημείο της ευθείας ΑΒ μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα σώμα ώστε να ισορροπήσει;

iii) Να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου κατά μήκος του άξονα x΄x, θεωρώντας αρχή του άξονα το κέντρο του Χ σώματος, για τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

iv) Να βρεθεί η ελάχιστη αρχική κινητική ενέργεια με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί ένα σώμα 2kg από το σημείο Α του σώματος Χ για να φτάσει στην επιφάνεια του δεύτερου ουράνιου σώματος. Ποια θα ήταν η αντίστοιχη απάντηση αν η εκτόξευση γινόταν αντίστροφα από το Υ προς το Χ;

Απάντηση:

i) Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε κάθε σημείο του χώρου οφείλεται στην παρουσία και των δύο ουρανίων σωμάτων. Αλλά τότε αν εστιάσουμε την προσοχή μας στο σημείο Α της επιφάνειας του Χ, θα έχουμε:

$$g_A = G\frac{M_1}{R_1^2} + G\frac{M_2}{(AO_2)^2} \rightarrow$$

$$g_A = \frac{9\cdot 10^{14}}{\left(10^7\right)^2} N/kg + \frac{64\cdot 10^{12}}{\left(18\cdot 10^7\right)^2} N/kg = (9+0,002)\,{}^{N}\!/_{kg} = 9\,{}^{N}\!/_{kg}$$

Το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι στην πραγματικότητα η ένταση στο σημείο Α καθορίζεται «αποκλειστικά» από το σώμα Χ, οπότε και στα υπόλοιπα σημεία της επιφάνειάς του, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι έχουμε το ίδιο μέτρο για την ένταση $g_X=9\,{}^{N}\!/_{kg}$.

Με την ίδια λογική για το σημείο Β του Υ θα έχουμε:

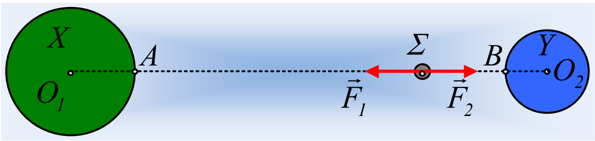
$$g_B = G\frac{M_1}{(O_1B)^2} + G\frac{M_2}{R_2^2} \rightarrow$$

$$g_B = \frac{9\cdot 10^{14}}{\left(186\cdot 10^7\right)^2} N/kg + \frac{64\cdot 10^{12}}{\left(4\cdot 10^6\right)^2} N/kg = \left(2\cdot 10^{-4}+4\right){}^{N}\!/_{kg} = 4\,{}^{N}\!/_{kg}$$

Προφανώς το προηγούμενο συμπέρασμα επαληθεύεται και για την επιφάνεια του σώματος Υ.

Σημείωση: Τα παραπάνω αποτελέσματα μας λένε στην πραγματικότητα ότι στην επιφάνεια των δύο σωμάτων επικρατεί επιτάχυνση βαρύτητας με τιμή $g_1=9m/s^2$ και $g_2=4m/s^2$.

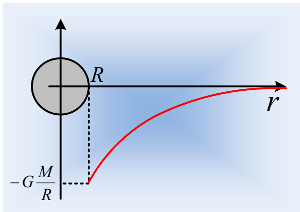
ii) Έστω ότι το σημείο στο οποίο θα ισορροπήσει το σώμα, είναι το σημείο Σ, όπου $(O_1\Sigma)=x$, τότε $F_1=F_2$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:



$$G\frac{M_1 m}{x^2}=G\frac{M_2 m}{(D-x)^2}\rightarrow\left(\frac{D-x}{x}\right)^2=\frac{GM_2}{GM_1}\rightarrow$$

$$\frac{D-x}{x}=\sqrt{\frac{64\cdot 10^{12}}{9\cdot 10^{14}}}=\frac{8}{30}\rightarrow x=\frac{15}{19}D=150.000km$$

iii) Για ένα μεμονωμένο ουράνιο σφαιρικό σώμα, το δυναμικό σε συνάρτηση με την απόσταση r δίνεται από την εξίσωση $V=-G\frac{M}{r}$ και η γραφική του παράσταση έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.

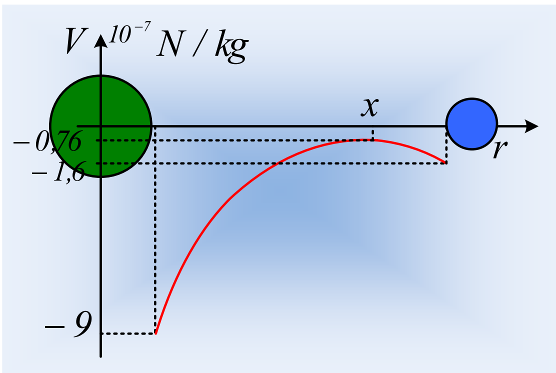


Στην περίπτωσή μας βέβαια έχουμε δύο ουράνια σώματα, οπότε σε ένα σημείο που απέχει κατά r, από το κέντρο O_1 θα έχουμε δυναμικό:

$$V=-G\frac{M_1}{r}-G\frac{M_2}{D-r}$$

Αν λάβουμε δε υπόψη τα συμπεράσματα που προέκυψαν στο i) ερώτημα, το βαρυτικό πεδίο στην «γειτονιά» του σώματος Χ καθορίζεται μόνο από το Χ και στην «γειτονιά» του Υ, μόνο από το σώμα Υ.

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό στα σημεία Α και Β βρίσκοντας:



$$V_A=-G\frac{M_1}{R_1}=-\frac{9\cdot 10^{14}}{10^7}J/_{kg}=-9\cdot 10^7 J/_{kg}$$

$$V_B=-G\frac{M_2}{R_2}=-\frac{64\cdot 10^{12}}{4\cdot 10^6}J/_{kg}=-1{,}6\cdot 10^7 J/_{kg}$$

Εξάλλου για το σημείο Σ, έχουμε:

$$V_\Sigma=-G\frac{M_1}{x}-G\frac{M_2}{D-x}=-\frac{9\cdot 10^{14}}{15\cdot 10^7}J/_{kg}-\frac{64\cdot 10^{12}}{4\cdot 10^7}J/_{kg}=-0{,}76\cdot 10^7 J/_{kg}$$

Με βάση τις τιμές αυτές, ένα ποιοτικό διάγραμμα για το δυναμικό, είναι όπως στο παραπάνω σχήμα.

iv) Με βάση τα προηγούμενα το σώμα που εκτοξεύουμε με κατεύθυνση από το Α προς το Β, θα δέχεται δύναμη αντίθετη της ταχύτητάς του, μέχρι το σημείο Σ σε απόσταση x=150.000km, οπότε και επιβραδύνεται. Στη συνέχεια θα δεχτεί δύναμη προς το Β η οποία θα το επιταχύνει. Κατά συνέπεια αρκεί να ξεπεράσει ελάχιστα τη θέση Σ, ή οριακά να φτάσει σε αυτό και από κει και πέρα θα εξασφαλίσει την επιτάχυνσή του το βαρυτικό πεδίο του σώματος Υ. Αλλά τότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των σημείων Α και Σ έχουμε:

$$K_A+U_A=K_\Sigma+U_\Sigma \rightarrow$$

$$K_{A,min}=U_\Sigma-U_A=m(V_\Sigma-V_A)=2\cdot(-0,76+9)\cdot 10^7 J=13,9\cdot 10^7 J.$$

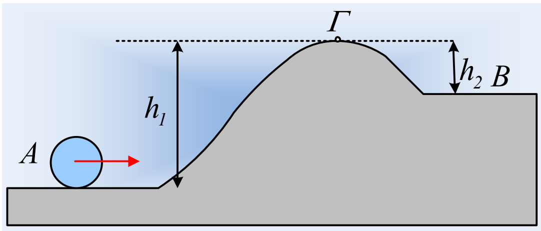
Αλλά και στην περίπτωση που εκτοξεύεται από το Β αρκεί να φτάσει ξανά στο Σ, οπότε με ίδιο τρόπο:

$$K_B+U_B=K_\Sigma+U_\Sigma \rightarrow$$

$$K_{B,min}=U_\Sigma-U_B=m(V_\Sigma-V_B)=2\cdot(-0,76+1,6)\cdot 10^7 J=1,68\cdot 10^7 J.$$

Αναλογία:

Μια μπάλα μάζας 0,5kg εκτοξεύεται από την θέση Α, θέλοντας να φτάσει στη θέση Β του $2^{ου}$ οριζόντιου επιπέδου, όπου μεταξύ τους μεσολαβεί ένας μικρός λόφος ύψους h_1=20m από το Α και h_2=4m από το Β.



Προφανώς αρκεί η μπάλα να φτάσει στην κορυφή του λόφου (σημείο Γ) αφού στη συνέχεια θα πέσει προς το Β και όμοια αν ξεκινήσει από το Β, πρέπει να φτάσει επίσης στο Γ. Δηλαδή στο σημείο με το μέγιστο ύψος ή αν προτιμάτε στη θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας.

Το αντίστοιχο σημείο με «το μέγιστο ύψος», δηλαδή με το μέγιστο δυναμικό, όπου το σώμα θα έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια, στην περίπτωση των δύο ουρανίων σωμάτων, είναι το σημείο Σ!

dmargaris@gmail.com