|  |
| --- |
| Μελέτη μιας σύνθεσης από ένα διάγραμμα |



Ένα σώμα μάζας m=0,2kg κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα, εκτελώντας μια παλινδρομική κίνηση γύρω από την θέση x=0 και στο διάγραμμα δίνεται η θέση του σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου οι χρονικές στιγμές που έχουν σημειωθεί στο σχήμα είναι t1=3,74s και t2=8,74s.

Η παραπάνω κίνηση μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο αρμονικών ταλαντώσεων με εξισώσεις:

x1=2∙ημ(2πt) και x2=Α2 ∙ημ(ω2t+ π/2) (μονάδες στο S.Ι.)

i) Να υπολογιστεί το πλάτος Α2.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση x=x(t) για την απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογιστεί η περίοδος του διακροτήματος καθώς και η γωνιακή συχνότητα ω2.

iii) Για τη χρονική στιγμή t3=5s να υπολογισθούν:

 α) Η ταχύτητα του σώματος.

 β) Η (συνισταμένη) δύναμη που επιταχύνει το σώμα, καθώς και η ισχύς της.

***Απάντηση:***

* 1. Θεωρώντας την κίνηση ως σύνθετη, αποτελούμενη από τις δύο παραπάνω αρμονικές ταλαντώσεις, οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση και πραγματοποιούνται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, παίρνουμε με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας, για την απομάκρυνση του σώματος:

*x=x1+x2 = 2∙ημ(2πt) + Α2∙ημ(ω2t+π/2)*  (S.Ι.) (1)

Αλλά τότε τη στιγμή t=0, x=2m και με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση (1) παίρνουμε:

*2=2∙ημ0°+Α2∙(0+π/2) → Α2=2m*

* 1. Με εφαρμογή της «γνωστής» τριγωνομετρικής ταυτότητας παίρνουμε:

*x=x1+x2=2(ημ2πt+ημ(ω2t+π/2)* →

$$x=2∙2∙συν\left(\frac{2πt-ω\_{2}t-^{π}/\_{2}}{2}\right)ημ\left(\frac{2πt+ω\_{2}t+^{π}/\_{2}}{2}\right)\rightarrow $$

$x=4∙συν\left(πt-\frac{ω\_{2}t}{2}-\frac{π}{4}\right)ημ\left(πt+\frac{ω\_{2}t}{2}+\frac{π}{4}\right)$(2)

Η παραπάνω εξίσωση (2) είναι, (έστω και λίγο διαφορετικής μορφής), η εξίσωση της «ιδιόμορφης» ταλάντωσης που εμφανίζει διακροτήματα και όπου το «πλάτος» του διακροτήματος δίνεται από την σχέση:

$$Α=\left|4∙συν\left(πt-\frac{ω\_{2}t}{2}-\frac{π}{4}\right)\right|$$

Το «πλάτος» μηδενίζεται για πρώτη φορά τη στιγμή t1 και για δεύτερη φορά τη στιγμή t2, οπότε το χρονικό διάστημα Δt=t2-t1=5s, δεν είναι τίποτα άλλο, παρά η περίοδος του διακροτήματος:

$$Τ\_{δ}=5s $$

Αλλά για την περίοδο αυτή έχουμε:

 $ Τ\_{δ}=5s \rightarrow \frac{1}{\left|f\_{1}-f\_{2}\right|}=5s\rightarrow \left|f\_{1}-f\_{2}\right|=0,2Hz\rightarrow f\_{1}-f\_{2}=\pm 0,2Ηz$

Όμως *f1=ω1/2π=1Ηz*, οπότε:

*f2= 1,2 Ηz ή f2= 0,8 Ηz*

Μεταξύ των χρονικών στιγμών t1 και t2 μπορούμε να μετρήσουμε στο διάγραμμα 4,5 ταλαντώσεις, πράγμα που σημαίνει ότι η συχνότητα της κίνησης, είναι ίση:

$$f\_{κ}=\frac{Ν}{Δt}=\frac{4,5}{5}Hz=0,9Hz=\frac{f\_{1}+f\_{2}}{2}\rightarrow $$

*f1+ f2= 2 fκ → f2=2∙0,9 Hz-1Hz =0,8Hz.*

Συνεπώς *ω2=2πf2=1,6π* (rad/s).

Οπότε επιστρέφοντας στην (2) παίρνουμε:

$$x=4∙συν\left(0,2πt-\frac{π}{4}\right)ημ\left(1,8πt+\frac{π}{4}\right)$$

* 1. Από την αρχή της επαλληλίας, για την κίνηση του σώματος την οποία αναλύσαμε σε δύο αρμονικές ταλαντώσεις, πέρα από την εξίσωση x=x1+x2, ισχύουν και οι αντίστοιχες εξισώσεις για ταχύτητες και επιταχύνσεις:

*υ=υ1 + υ2 και α=α1 + α2*

α) Έτσι τη χρονική στιγμή t3=5s, έχουμε για την ταχύτητα:

*υ=υ1+υ2=Αω1∙συν(2πt) + Αω2∙συν(2πt+π/2) →*

*υ= 4π∙συν(2π∙5) +3,2π∙συν(1,6π∙5+π/2) →*

*υ=4π+0 = 4π m/s*

β) Με την ίδια λογική για την επιτάχυνση του σώματος θα έχουμε:

*α=α1 + α2=-ω12∙Α∙ημ(2πt) - ω22∙Α∙ημ(1,6πt+π/2)→*

*α= -4π2∙2∙ημ(2π∙5) -1,62π2∙2∙ημ(1,6π∙5+π/2)→*

*α ≈ 0 -50,5∙ημ(8π+π/2) = -50,5 m/s2.*

Αλλά τότε, τη στιγμή αυτή δέχεται από το περιβάλλον του (συνισταμένη) δύναμη, με τιμή:

*F=m∙α = 0,2∙(-50,5)Ν = -10,1Ν*

Ενώ για την ισχύ της δύναμης αυτής, θα έχουμε (δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές):

*Ρ=F∙υ =(-10,1)∙4π W = - 40,4∙π W= - 127 W*

***dmargaris@gmail.com***