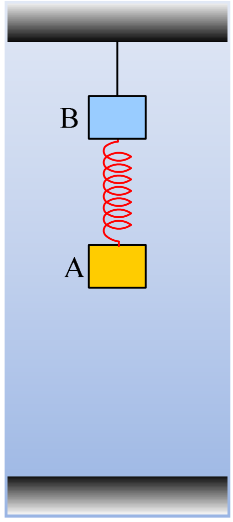
# Ταλαντώσεις σώματος αλλά και συστήματος.

*Μια καλοκαιρινή περιπλάνηση….*




Τα δυο σώματα Α και Β με ίσες μάζες $m_1=m_2=m=1kg$, ηρεμούν όπως στο σχήμα, όπου το ελατήριο έχει σταθερά k=100N/m, ενώ το Α βρίσκεται σε ύψος h=0,45m από το έδαφος. Απομακρύνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω το σώμα Α, κατά $y_1=0,1m$ και σε μια στιγμή που θεωρούμε t=0, το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί εκτελώντας ΑΑΤ.

i) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσής του σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση θετική.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

iii) Τη στιγμή που η τάση του νήματος γίνεται ελάχιστη για τρίτη φορά, το νήμα κόβεται και τα σώματα πέφτουν. Με την κρούση με το έδαφος το σώμα Α προσκολλάται. Να βρεθεί η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το Β σώμα.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

**Απάντηση:**

i) Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος Α δίνεται από την εξίσωση

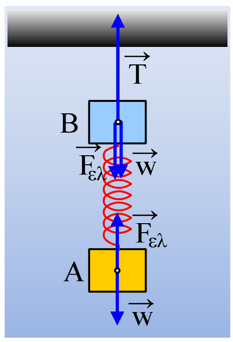
$$y=A\cdot ημ(ωt+φ_o)$$

όπου $A=y_1=0,1m$, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{100}{1}}rad/s=10rad/s$, ενώ τη στιγμή t=0, y=+A, οπότε:

$+A=A\cdot ημφ_o \rightarrow φ_o=\dfrac{\pi}{2}$, συνεπώς η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$y=0,1\cdot ημ\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

ii) Στην θέση ισορροπίας του σώματος Α, έχουμε:




$$ΣF=0 \rightarrow F_{ελ}=mg \rightarrow \Delta\ell=\frac{m_1 g}{k}=\frac{1\cdot 10}{100}m=0,1m$$

Όπου Δℓ η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Στην τυχαία θέση ταλάντωσης, για το σώμα Α θα έχουμε:

$$ΣF=-ky \rightarrow F_{ελ}-mg=-ky \rightarrow F_{ελ}=mg-ky \rightarrow$$

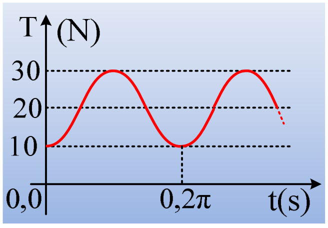
$$F_{ελ}=10-10\cdot ημ\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι πάντα θετική (φορά προς τα πάνω), πράγμα αναμενόμενο, αφού εκτρέψαμε το σώμα προς τα πάνω κατά $y_1$, όσο και η επιμήκυνση του ελατηρίου, συνεπώς η αρχική θέση, ήταν η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Αλλά τότε η δύναμη του ελατηρίου στο σώμα Β, θα έχει φορά προς τα κάτω, με το ίδιο μέτρο και από την ισορροπία του Β σώματος παίρνουμε;

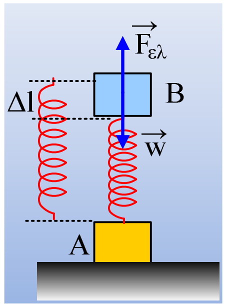
$$\Sigma F_B=0 \rightarrow T=w_2+|F_{\varepsilon\lambda}| = 10+10-10\cdot \eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)=20-10\cdot\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Και η γραφική της παράσταση είναι της μορφής:




iii) Τη στιγμή που η τάση του νήματος γίνεται ελάχιστη, το σώμα είναι στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του, έχοντας μηδενική ταχύτητα και με βάση τα παραπάνω το ελατήριο έχει το φυσικό μήκος του. Κατά συνέπεια δεν ασκεί δύναμη στα σώματα, τα οποία δεχόμενα μόνο το βάρος εκτελούν ελεύθερη πτώση. Έτσι το σώμα Α, θα φτάσει στο έδαφος μετά από χρόνο:

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}45}{10}}s=0{,}3s$$




Τη στιγμή αυτή, το Β σώμα θα έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_2$=gt=10·0,2m/s=2m/s και αφού το Α θα σταματήσει να κινείται, το Β θα αρχίσει να συσπειρώνει το ελατήριο, ξεκινώντας την δική του ΑΑΤ, από μια θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Στη θέση όμως ισορροπίας του σώματος Β ισχύει:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta\ell \rightarrow \Delta\ell=\frac{m_1 g}{k}=\frac{1\cdot 10}{100}m=0{,}1m$$

Συνεπώς τη στιγμή που αρχίζει την ταλάντωσή του απέχει κατά $y_2$= 0,1m από τη θέση ισορροπίας του, έχοντας ταχύτητα 2m/s, οπότε η ενέργεια ταλάντωσής του είναι:

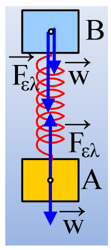
$$E=\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\frac{1}{2}ky_2^2=\frac{1}{2}1\cdot 3^2\,J+\frac{1}{2}100\cdot 0{,}1^2\,J=5J$$

Τα παραπάνω είναι ερωτήματα και για μαθητές.

Ας το προχωρήσουμε όμως λίγο, το ίδιο θέμα, σε μια άλλη εκδοχή (*με αλλαγή μόνο της χρονικής στιγμής που κόβεται το νήμα..*) για να δούμε, είναι το ίδιο εύκολη η κατάσταση;

Αν το νήμα κοπεί τη στιγμή $t_1$=0,1π s, να μελετηθεί κίνηση του συστήματος.

**Απάντηση:**

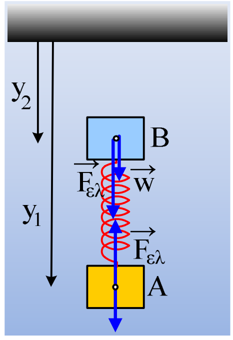



Τη στιγμή που κόβεται το νήμα, το Α σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ($t_1$= ½ Τ), οπότε το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_o$=2A=0,2m. Αλλά τότε ασκεί δυνάμεις και στα δυο σώματα, με μέτρο $F_{o,\varepsilon\lambda}=k\cdot\Delta\ell_o$=20Ν. Το αποτέλεσμα θα είναι το Α σώμα να επιταχυνθεί προς τα πάνω με αρχική επιτάχυνση:

$$\alpha_{o,1}=\frac{F_{o,\varepsilon\lambda}-m_1 g}{m_1}=\frac{20N-10N}{1}m/s^2=10m/s^2$$

Ενώ το σώμα Β αποκτά επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$\alpha_{o,2}=\frac{F_{o,\varepsilon\lambda}+m_2 g}{m_2}=\frac{20N+10N}{1}m/s^2=30m/s^2$$




Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει τα δυο σώματα, σε μια τυχαία θέση κατά τη διάρκεια της πτώσης, να απέχουν κατά $y_1$ και $y_2$ από το σημείο ανάρτησης. Προφανώς:

$$y_1 - y_2=\ell=\ell_o+\Delta\ell=\ell_o+y$$

όπου y η επιμήκυνση του ελατηρίου.

Εφαρμόζουμε για κάθε σώμα το $2^o$ νόμο του Νεύτωνα και παίρνουμε:

$$m_1 g-ky=m_1\cdot\alpha_1 \quad (1)$$

$$m_2 g+ky=m_2\cdot\alpha_2 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με $m_2$ και την (2) με $m_1$ και με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$-k(m_1+m_2)y=m_1 m_2(\alpha_1-\alpha_2) \text{ ή}$$

$$m_1 m_2\left(\frac{d^2y_2}{dt^2}-\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)+(m_1+m_2)ky=0$$

Αλλά $y_1 - y_2=\ell_o+y \rightarrow \frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_2}{dt}=\frac{dy}{dt}\rightarrow\frac{d^2y_1}{dt^2}-\frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt_2}\rightarrow$

$$m_1 m_2\frac{d^2y}{dt^2}+(m_1+m_2)ky=0 \text{ ή}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$$

Θέτοντας τώρα $\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}=\frac{m}{2}$, όπου μ η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος παίρνουμε:

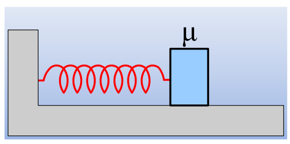
$$\mu\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, είναι της ίδιας μορφής με τη γνωστή μας εξίσωση που περιγράφει την ΑΑΤ, οπότε κατά αναλογία θα έχουμε:

$$y=A_1\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$$

όπου Α η μέγιστη επιμήκυνση, που στην περίπτωσή μας είναι η επιμήκυνση τη στιγμή που κόπηκε το νήμα, δηλαδή $A_1=2\Delta\ell_o=0{,}2$m, $\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}=\sqrt{\frac{2k}{m}}=10\sqrt{2}rad/s$ ενώ για t=0, $y=A_1$, οπότε $\varphi_o=\frac{\pi}{2}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y=0{,}2\cdot\eta\mu\left(10\sqrt{2}t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

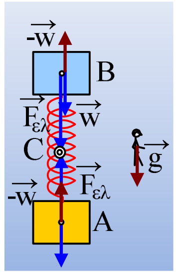



Παρατηρούμε δηλαδή το ελατήριο να επιμηκύνεται και να συσπειρώνεται αρμονικά με το χρόνο, όπως θα το έκανε, αν το ένα του άκρο ήταν σταθερό και στο άλλο του άκρο υπήρχε υποθετικό σώμα, με μάζα ίση με την **ανηγμένη μάζα** του συστήματος:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}.$$

Ας δούμε τώρα μερικές όψεις της νέας πραγματικότητας.

Το κέντρο μάζας C του συστήματος, προφανώς είναι το μέσον του ελατηρίου, αφού οι μάζες είναι ίσες.




Στη διάρκεια της πτώσης, ας πάρουμε έναν παρατηρητή Π, που «κάθεται» στο κέντρο μάζας C. Προφανώς πρόκειται για έναν μη αδρανειακό παρατηρητή, ο οποίος επιταχύνεται προς τα κάτω με επιτάχυνση $\vec{g}$. Ο παρατηρητής μας «βλέπει» να ασκείται σε κάθε σώμα και μια δύναμη d' Alembert, $-\vec{w}$, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε ο παρατηρητής Π, έχει δίπλα του ένα μονωμένο σύστημα δύο σωμάτων για το οποίο ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = 0$$

αφού η αρχική ορμή είναι μηδενική.

Πράγμα που σημαίνει ότι, κάθε στιγμή τα δύο σώματα θα έχουν αντίθετες ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1 = -\vec{\upsilon}_2$, δηλαδή τη στιγμή που η ταχύτητα του ενός γίνεται μέγιστη, μέγιστη θα είναι και του άλλου, ενώ τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του $m_1$ θα μηδενίζεται και του $m_2$.

***Προσοχή**, μιλάμε για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων, όπως τις μετράει ο μη αδρανειακός παρατηρητής που συμμετέχει στην κίνηση του κέντρου μάζας C.*

Αυτό, στην πράξη σημαίνει ότι, καθώς το μήκος του ελατηρίου μεταβάλλεται αρμονικά, τη στιγμή που θα έχει το μέγιστο μήκος του, οι ταχύτητες των δύο σωμάτων θα είναι μηδενικές, ενώ θα είναι μέγιστες τη στιγμή που το ελατήριο θα έχει το φυσικό μήκος του.

Αν τώρα ο Π παρακολουθήσει το σώμα Α μόνο, τι θα δει;

Θα δει ένα σώμα, που θα είναι δεμένο στο άκρο του ελατηρίου (το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο, στο C), και ταλαντώνεται με πλάτος $A_1$= ½ $\Delta\ell_{max}$=0,1m. Και επειδή η σταθερά αυτού του ελατηρίου είναι ίση με $k_1=2k^*$, συνεπώς το σώμα θα ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega$, ίση με την γωνιακή συχνότητα μεταβολής του μήκους του ελατηρίου, πράγμα αναμενόμενο, με βάση την παραπάνω ανάλυση.

Αλλά τότε για την απομάκρυνση του σώματος Α από τη θέση ισορροπίας του, θα έβρισκε την εξίσωση (θετική φορά προς τα κάτω):

$$x_1 = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Και αντίστοιχα για το σώμα Β:

$$x_2 = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Όλα αυτά όμως, όπως τα βλέπει ο παρατηρητής Π στο κέντρο μάζας C, ο οποίος επιταχύνεται προς τα κάτω εκτελώντας ελεύθερη πτώση.

Ας κάνουμε τώρα ένα βήμα παραπέρα.

Ας φανταστούμε την κίνηση κάθε σώματος σαν σύνθετη, αποτελούμενη από δύο ανεξάρτητες κινήσεις, όπου η μία είναι η ταλάντωση που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Π και η άλλη η ελεύθερη πτώση, θα είχαμε για τις θέσεις κάθε σώματος:

Σώμα Α:

$$y_1 = y_{01} + 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}gt^2$$

Σώμα Β:

$$y_2 = y_{02} + 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}gt^2$$

Όπου $y_{01}$ και $y_{01}$ οι αρχικές θέσεις τους.

Έτσι, για επιβεβαίωση ας βρούμε τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων, για τη στιγμή t=0, που κόβουμε το νήμα:

Για το Α σώμα:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0{,}1 \cdot 10\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right) + gt \rightarrow$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -0{,}1 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right) + g = g - 20 \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Και για t=0: $\alpha_1 = 10 m/s^2 - 20 m/s^2 = -10\ m/s^2$, δηλαδή επιτάχυνση μέτρου $10\ m/s^2$ με φορά προς τα πάνω.

Για το σώμα Β:

$$\frac{dy_2}{dt} = 0{,}1 \cdot 10\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) + gt \rightarrow$$

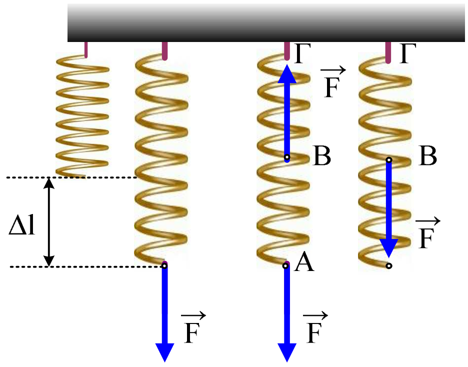
$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -0{,}1 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right) + g = g - 20 \cdot \eta\mu\left(10\sqrt{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Και για t=0: $\alpha_2 = 10 m/s^2 + 20 m/s^2 = +30\ m/s^2$, δηλαδή επιτάχυνση μέτρου $30\ m/s^2$ με φορά προς τα κάτω.

Οι τιμές αυτές βλέπουμε να βρίσκονται σε συμφωνία με τις τιμές που υπολογίστηκαν αρχικά και χωρίς εξισώσεις κίνησης.

**Σχόλια:**

1) Έστω ένα ελατήριο, σταθεράς k, στο άκρο του οποίου ασκώντας μια δύναμη F, του προκαλούμε μια επιμήκυνση Δℓ, όπως στο σχήμα.




Από τον νόμο του Hooke παίρνουμε F=k·Δℓ.

Αν εστιάσουμε τώρα στο μισό τμήμα του ελατηρίου (ΑΒ), αυτό ισορροπεί, συνεπώς δέχεται από το άλλο πάνω μισό (ΒΓ) μια δύναμη προς τα πάνω μέτρου F, αλλά τότε του ασκεί και δύναμη ίσου μέτρου, με φορά προς τα κάτω, όπως στο τελευταίο σχήμα. Αλλά τότε το τμήμα (ΒΓ), το μισό ελατήριο, έχει επιμήκυνση ½ Δℓ, με την επίδραση της δύναμης F, συνεπώς:

$$k_1 = \frac{F}{\Delta\ell_1} = \frac{F}{\frac{1}{2}\Delta\ell} = \frac{2F}{\Delta\ell} = 2k$$

Δηλαδή το μισό ελατήριο έχει διπλάσια σταθερά, από την σταθερά k, όλου του ελατηρίου.

Γενικότερα αν ένα ελατήριο, σταθεράς k, κοπεί σε ν ίσα μέρη, τότε το καθένα από αυτά θα έχει σταθερά k΄=νk.

2) Στο παράδειγμά μας χρησιμοποιήσαμε δυο ίσες μάζες στα άκρα του ελατηρίου. Προφανώς το κάναμε για ευνόητους λόγους, αλλά δεν είναι απαραίτητο. Έτσι αν π.χ. $m_1=3m_2$, η κατάσταση δεν θα άλλαζε, όσον αφορά την αντιμετώπιση. Η εξίσωση $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$ παραμένει η ίδια, όπως ίδια θα ήταν και η εξίσωση της επιμήκυνσης $y=A_1\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$, αλλά προφανώς με άλλη τιμή του ω, εξαρτώμενη από την τιμή της ανηγμένης μάζας.

Αλλά και η αντιμετώπιση μέσω του κινούμενου παρατηρητή, θα ήταν ίδια, αλλά προφανώς το κέντρο μάζας δεν θα ήταν στο μέσον του ελατηρίου, αλλά στο σημείο εκείνο για το οποίο $m_1\cdot x_1=m_2\cdot x_2$, δηλαδή σε σημείο που θα απείχε κατά το ¼ του μήκος του ελατηρίου, από το Α σώμα. Αλλά τότε ο παρατηρητής θα «έβλεπε» το σώμα Α να ταλαντώνεται στο άκρο ελατηρίου σταθερά $k_1=4k$. Όσον αφορά το πλάτος της κάθε ταλάντωσης, θα προέκυπτε, αν ο παρατηρητής μας εφάρμοζε την διατήρηση της ορμής και της μηχανικής ενέργειας, ανάμεσα στην αρχική θέση και στη θέση που το ελατήριο θα αποκτούσε το φυσικό μήκος του. Έτσι:

Από διατήρηση ορμής: $m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=P_{αρχ}=0 \rightarrow \upsilon_2=-3\upsilon_1$.

Από διατήρηση ενέργειας: $\frac{1}{2}k(\Delta\ell_o)^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$

Λύνοντας το σύστημα υπολογίζει την ταχύτητα κάθε σώματος και από εκεί το αντίστοιχο πλάτος ταλάντωσης.

**dmargaris@sch.gr**