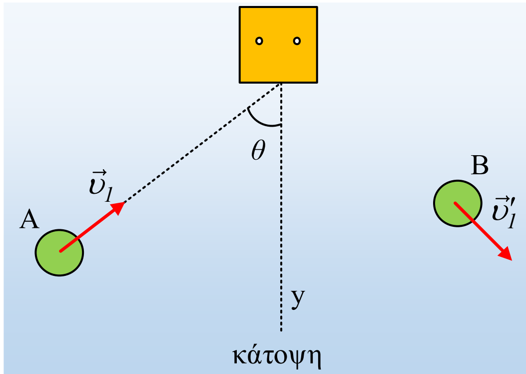
Όταν ακόμη και ο τοίχος …υποχωρεί!

Μια σφαίρα μάζας m_1=1kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=5m/s (χωρίς να στρέφεται) και συγκρούεται ελαστικά με έναν πακτωμένο ακλόνητο κύβο μάζας m_2=2kg. Το σημείο κρούσης είναι το κέντρο μιας έδρας του κύβου, ενώ η ταχύτητα $υ_1$ σχηματίζει με την κάθετη στην έδρα στο σημείο κρούσης, γωνία θ, όπου ημθ=0,8 και συνθ=0,6, όπως φαίνεται στο σχήμα (σε κάτοψη). Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ των συγκρουόμενων σωμάτων και $υ_1΄$ η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση, να βρεθούν:



i) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και η μεταβολή της ορμής:

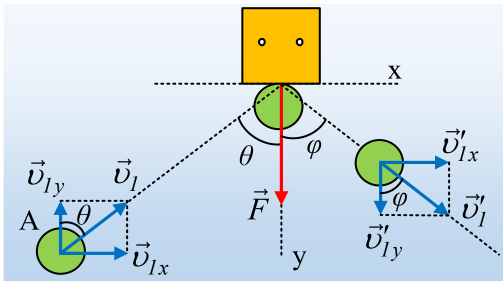
α) της σφαίρας, β) του κύβου και γ) του συστήματος των δύο σωμάτων

που οφείλονται στην κρούση.

ii) Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα, με μόνη διαφορά, ότι έχουμε αφαιρέσει την πάκτωση και ο κύβος έχει την δυνατότητα να κινηθεί, μετά την κρούση. Ποιες θα είναι τώρα οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα;

Απάντηση:

i) Σύμφωνα με την θεωρία του βιβλίου, κατά την ελαστική κρούση μιας σφαίρας με τοίχο, η σφαίρα ανακλάται με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα και με γωνία πρόσπτωσης, ίση με τη γωνία ανάκλασης. Στην περίπτωσή μας ο πακτωμένος κύβος αντιστοιχεί σε ακλόνητο τοίχο. Ας το δούμε λίγο αναλυτικά, με βάση το διπλανό σχήμα. Η κρούση οφείλεται στην ταχύτητα $υ_{1y}$ της σφαίρας και κατά τη διάρκεια της κρούσης δέχεται δύναμη F από τον κύβο, κάθετη στην επιφάνεια, δύναμη η οποία θα μεταβάλει την ορμή στην διεύθυνση y, αφήνοντας ανεπηρέαστη την συνιστώσα $υ_{1x}$. Από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας παίρνουμε:



$$K_{πριν} = K_{μετ} \rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \quad (1)$$

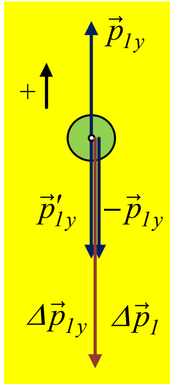
$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + 0 \rightarrow |υ_1| = |υ'_1|$$

Οπότε για τις οριζόντιες συνιστώσες ταχύτητας θα έχουμε:

$$υ'_{1x} = υ_{1x} \rightarrow |υ'_1|ημφ = |υ_1|ημθ \rightarrow ημφ = ημθ \rightarrow φ = θ$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε για τις ζητούμενες μεταβολές:

α) Για την σφαίρα:



$$\Delta K_1 = K'_1 - K_1 = 0$$

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \xrightarrow{\sigma\varepsilon\ \acute{\alpha}\xi o\nu\varepsilon\varsigma}$$

$$\Delta p_{1x} = p'_{1x} - p_{1x} = m_1\upsilon'_{1x} - m_1\upsilon_{1x} = 0$$

$$\Delta p_{1y} = p'_{1y} - p_{1y} = m_1\upsilon'_{1y} - m_1\upsilon_{1y} \rightarrow$$

$$\Delta p_{1y} = -m_1|\upsilon'_1|\sigma\upsilon\nu\varphi - m_1|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta = -m_1|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta - m_1|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = \Delta p_{1y} = -2m_1|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta = -2\cdot 1\cdot 5\cdot 0{,}6kgm/s = -6kgm/s$$

β) Για τον κύβο, ο οποίος παρέμεινε ακίνητος, προφανώς:

$\Delta K_2=0$ και $\Delta p_2=0$.

γ) Για το σύστημα σφαίρα-κύβος:

$\Delta K=0$ (ελαστική κρούση…) και

$$\Delta\vec{p}_{o\lambda} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \Delta\vec{p}_1 + 0 = \Delta\vec{p}_1 \rightarrow$$

$$\Delta p_{o\lambda} = \Delta p_1 = -6kgm/s$$

ii) Αλλά και στην περίπτωση που ο κύβος έχει την δυνατότητα να κινηθεί και πάλι η δύναμη F είναι κάθετη στην επιφάνεια του κύβου, με αποτέλεσμα η ορμή της σφαίρας στην διεύθυνση x να παραμένει σταθερή, όπως επίσης ο κύβος δεν θα αποκτήσει ταχύτητα στην διεύθυνση αυτή. Έτσι και πάλι θα ισχύει:

$$\upsilon'_{1x} = \upsilon_{1x} \quad \kappa\alpha\iota\ \upsilon'_{2x} = 0$$

Στην διεύθυνση y όμως θα μεταβληθούν οι επιμέρους ορμές των δύο σωμάτων, αφού το σύστημα είναι μονωμένο, οπότε:

$$p_{1y} + p_{2y} = p'_{1y} + p'_{2y} \rightarrow$$

$$m_1\upsilon_{1y} = m_1\upsilon'_{1y} + m_2\upsilon'_{2y} \quad (2)$$

Ενώ από τις κινητικές ενέργειες (σχέση (1)) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}^2} + \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}^2 = \cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2} + \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2 + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2}} + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}'^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}'^2 \quad (3)$$

Οι εξισώσεις (2) και (3) αποτελούν το «γνωστό» σύστημα των εξισώσεων της κεντρικής ελαστικής κρούσης δύο σωμάτων όπου το δεύτερο ήταν ακίνητο. Οπότε μπορούμε να πάρουμε (χωρίς απόδειξη) τις σχέσεις:

$$\upsilon'_{1y} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1y} \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon'_{2y} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{1y}$$

Οπότε με αντικατάσταση, λαμβάνοντας υπόψη ότι $υ_{1y}=υ_1συνθ=5·0,6m/s=3m/s$, βρίσκουμε:

$$υ'_{1y}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_{1y}=\frac{1-2}{1+2}3m/s=-1m/s$$

$$υ'_{1y}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_{1y}=\frac{2\cdot 1}{1+2}3m/s=2m/s$$

Πάμε τώρα στα ερωτήματα:

α) Για την σφαίρα:

$$ΔK_1=K'_1-K_1=\frac{1}{2}m_1υ'^2_1-\frac{1}{2}m_1υ_1^2=\frac{1}{2}m_1\left(υ'^2_{1x}+υ'^2_{1y}\right)-\frac{1}{2}m_1\left(υ^2_{1x}+υ^2_{1y}\right)\rightarrow$$

$$ΔK_1=\frac{1}{2}m_1υ'^2_{1y}-\frac{1}{2}m_1υ^2_{1y}\rightarrow$$

$$ΔK_1=\frac{1}{2}1\cdot 1^2J-\frac{1}{2}1\cdot 3^2J=-4J$$

$$Δ\vec{p}_1=\vec{p}'_1-\vec{p}_1\xrightarrow{σε\ άξονες}$$

$$Δp_{1x}=p'_{1x}-p_{1x}=m_1υ'_{1x}-m_1υ_{1x}=0$$

$$Δp_{1y}=p'_{1y}-p_{1y}=m_1υ'_{1y}-m_1υ_{1y}\rightarrow$$

$$Δp_1=Δp_{1y}=1\cdot(-1)kgm/s-1\cdot 3kgm/s=-4kgm/s$$

β) Για τον κύβο, θα έχουμε:

$$ΔK_2=K'_2-K_1=\frac{1}{2}m_2υ'^2_2-0=\frac{1}{2}m_2υ'^2_{2y}=\frac{1}{2}2\cdot 2^2J=4J$$

$$Δ\vec{p}_2=\vec{p}'_2-\vec{p}_2=\vec{p}'_2\xrightarrow{σε\ άξονες}$$

$$Δp_{2x}=p'_{2x}-p_{2x}=0$$

$$Δp_{2y}=p'_{2y}=m_2υ'_{2y}=2\cdot 2kgm/s=4kgm/s$$

γ) Για το σύστημα σφαίρα-κύβος:

$ΔK=0$ (ελαστική κρούση…) και $Δp_{ολ}=0$ (μονωμένο σύστημα).

dmargaris@gmail.com