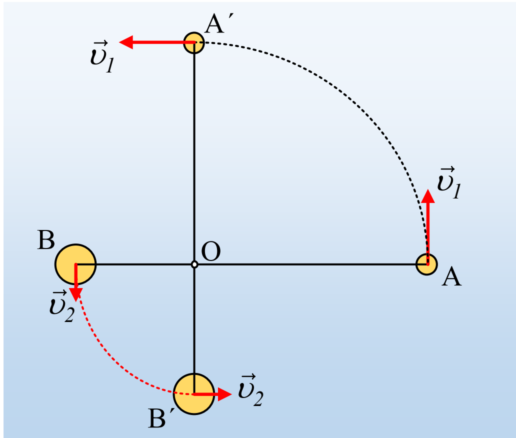
Δυο σφαίρες σε κυκλικές τροχιές



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο μικρές σφαίρες Α και Β δεμένες στα άκρα μη ελαστικού (και τεντωμένου) νήματος μήκους ℓ=1,2m. Σε μια στιγμή $t_0=0$, κτυπάμε ταυτόχρονα τις δύο σφαίρες προσδίδοντάς τους οριζόντιες ταχύτητες με μέτρα υ_1=2m/s και υ_2=1m/s, κάθετες προς το νήμα. Παρατηρούμε στη συνέχεια τις σφαίρες να εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση, σε τροχιές με κέντρο ένα (ελεύθερο) σημείο Ο του νήματος, ενώ το νήμα παραμένει διαρκώς τεντωμένο. Στο σχήμα, (σε κάτοψη) βλέπετε τις αρχικές θέσεις των δύο σφαιρών, καθώς και τις θέσεις τους μετά από ¼ της κοινής περιόδου περιφοράς τους.

i) Να βρεθούν οι ακτίνες των κυκλικών τροχιών που διαγράφουν οι σφαίρες.

ii) Αν m_1=0,1kg, να υπολογιστούν:

α) Η ορμή και ο (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής της ορμής της Α σφαίρας, στην αρχική θέση.

β) Η μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας, μέχρι η επιβατική ακτίνα να διαγράψει γωνία 90°, ερχόμενη στη θέση Α΄.

γ) Ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας Α, κατά την παραπάνω μετακίνησή της.

iii) Αφού υπολογίσετε την μάζα της δεύτερης σφαίρας, να υπολογίσετε την ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών και το ρυθμό μεταβολής της ορμής, τη στιγμή $t_0=0^+$.

Απάντηση:

i) Η ακτίνα τη Α σφαίρας είναι η (ΟΑ)=r_1, ενώ της Β η (ΟΒ)=r_2, ενώ οι σφαίρες εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητες υ_1 και υ_2 για τις οποίες έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{2\pi R_1}{T} \quad \text{και} \quad \upsilon_2 = \frac{2\pi R_2}{T}$$

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

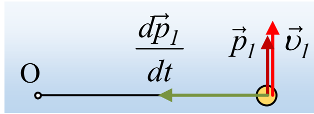
$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{2\pi R_1 / \cancel{T}}{2\pi R_2 / \cancel{T}} = \frac{R_1}{R_2} \rightarrow$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{2}{1} \rightarrow R_1 = 2R_2$$

$$\text{Όμως } R_1 + R_2 = \ell \rightarrow 2R_2 + R_2 = \ell \rightarrow R_2 = \frac{\ell}{3} = \frac{1,2m}{3} = 0,4m \rightarrow$$

$$R_1 = 0,8m$$

ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ορμής και του ρυθμού μεταβολής της ορμής της σφαίρας Α, τη στιγμή $t_0=0^+$.



α) Η αρχική ορμή της Α σφαίρας, έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας υ_1 και μέτρο:

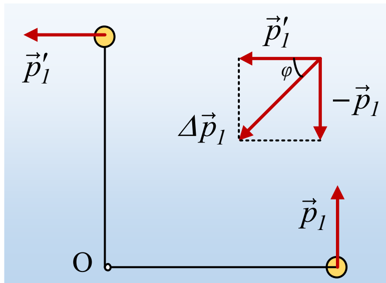
$$p_1 = m\upsilon_1 = 0,1kg \cdot 2m/s = 0,2\ kg \cdot m/s$$

Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε:

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{\sigma\tau} = \frac{dp_1}{dt} = \Sigma F = F_k = m_1\frac{\upsilon_1^2}{R_1} = 0,1 \cdot \frac{2^2}{0,8}kg \cdot m/s^2 = 0,5kg \cdot m/s^2$$

Αφού η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα, είναι η κεντρομόλος δύναμη.

β) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ορμής της Α σφαίρας στις δύο θέσεις, όπου τα μέτρα τους είναι ίσα. Για την μεταβολή της ορμής της σφαίρας, έχουμε:



$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + (-\vec{p}_1)$$

Αλλά τότε το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής $\Delta\vec{p}_1$ προκύπτει με την μέθοδο του παραλληλογράμμου, ως η διαγώνιος ενός τετραγώνου, με μέτρο:

$$\Delta p_1 = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_1'|^2} = |\vec{p}_1|\sqrt{2} = 0,2\sqrt{2}kg \cdot m/s$$

Με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ=45° με την οριζόντια διεύθυνση, όπως στο σχήμα.

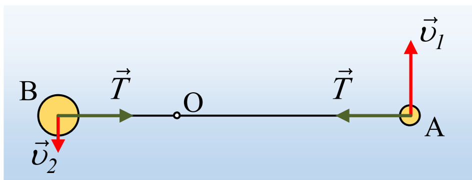
γ) Για την περίοδο των κυκλικών κινήσεων έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{2\pi R_1}{T} \to T = \frac{2\pi R_1}{\upsilon_1} = \frac{2\pi \cdot 0,8}{2}s = 0,8\pi\ s$$

Οπότε ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής από 0- ¼ Τ έχει την κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής (γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση) και μέτρο:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{\Delta p_1}{T/4} = \frac{4\Delta p_1}{T} = \frac{4 \cdot 0,2\sqrt{2}}{0,8\pi}kg \cdot m/s^2 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}kg \cdot m/s^2.$$

iii) Το νήμα ασκεί σε κάθε σφαίρα μια δύναμη που ονομάζουμε τάση του νήματος Τ, όπως στο σχήμα. Αλλά αυτή η τάση του νήματος «παίζει» και τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης για την κυκλική κίνηση, κάθε σφαίρας και παραπάνω βρήκαμε ότι το μέτρο της είναι:



$$F_k = m_1\frac{\upsilon_1^2}{R_1} = 0,5N$$

Αλλά τότε και για την 2η σφαίρα θα έχουμε:

$$T = F_k = m_2\frac{\upsilon_2^2}{R_2} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{F_k \cdot R_2}{\upsilon_2^2} = \frac{0,5\cdot 0,4}{1^2}kg = 0,2kg$$

Οπότε η ολική ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών αμέσως μόλις αποκτήσουν τις παραπάνω ταχύτητες είναι:

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \xrightarrow{αλγεβρικά} p_{ολ} = p_1 + p_2 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$$

Και θεωρώντας θετική την ταχύτητα υ_1, με αντικατάσταση έχουμε:

$$p_{ολ} = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0,1\cdot 2kgm/s + 0,2(-1)kgm/s = 0$$

Ενώ και για το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος, θα έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma\vec{F} = (\vec{w}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1) + (\vec{w}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2)$$

Όμως από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα κάθε σφαίρας θα έχουμε:

$$\vec{w}_1 + \vec{N}_1 = \vec{w}_2 + \vec{N}_2 = 0$$

Και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{d\vec{p}_{ολ}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \Sigma\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

Αφού οι δύο τάσεις στις σφαίρες είναι αντίθετες.

Σχόλια.

- Προφανώς το παραπάνω σύστημα είναι μονωμένο, αφού η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική. Αλλά τότε η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή (και ίση με μηδέν!).
- **Για καθηγητές**: Το σημείο Ο, δεν είναι παρά το κέντρο μάζας του συστήματος, το οποίο παραμένει ακίνητο.

dmargaris@gmail.com