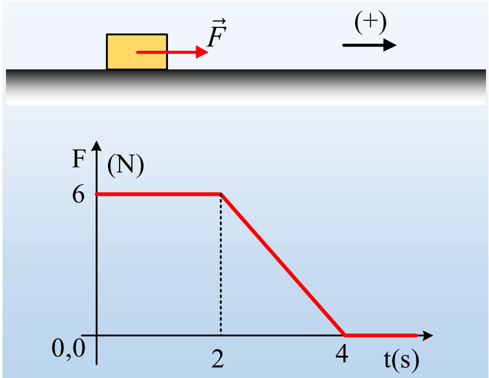
Η ορμή με την επίδραση μεταβλητής δύναμης



Ένα σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο με ορισμένη ταχύτητα $υ_o$. Κάποια στιγμή t_0=0, δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης, ίδιας **διεύθυνσης** με την ταχύτητα, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα, με αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t_1=2s, το σώμα να έχει ορμή p_1=+4kg·m/s (θετική η προς τα δεξιά κατεύθυνση).

i) Να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής του σώματος στο χρονικό διάστημα 0-t_1. Πώς συνδέεται η μεταβολή αυτή με το διάγραμμα F-t που μας δίνεται;

Δίνεται η μάζα του σώματος m=2kg.

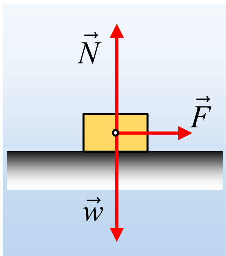
ii) Να υπολογιστεί η αρχική ορμή του σώματος, καθώς και η αρχική ισχύς της ασκούμενης δύναμης F.

iii) Πόσο είναι το έργο της δύναμης F μέχρι τη στιγμή t_1;

iv) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος μόλις μηδενιστεί η ασκούμενη δύναμη F.

v) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος την χρονική στιγμή, όπου η ασκούμενη δύναμη έχει τιμή F_2=5N καθώς και ο μέσος ρυθμός μεταβολής της ορμής στο χρονικό διάστημα από 2s έως 4s.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, όπου:

$$ΣF_y=N-w=0 \rightarrow N=mg$$

αφού το σώμα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση. Έτσι στην ουσία η μόνη δύναμη που μεταβάλλει την κίνηση του σώματος, είναι η δύναμη F, που μας δίνεται.

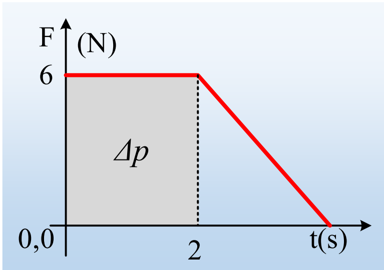
i) Εφαρμόζουμε το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για μια τυχαία στιγμή μεταξύ 0-2s:

$$Σ\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \xrightarrow{αλγεβρικά} F=\frac{dp}{dt}$$

Όπου το σύμβολο $\frac{dp}{dt}$ παριστάνει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της ορμής (όπως ακριβώς έχουμε την στιγμιαία ταχύτητα ως τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της θέσης του σώματος). Όμως στο παραπάνω χρονικό διάστημα η δύναμη παραμένει σταθερή, άρα και ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής παραμένει σταθερός και ίσος με τον μέσο ρυθμό, στο ίδιο χρονικό διάστημα. Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε:

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{Δp}{Δt} \rightarrow$$
$$Δp=F \cdot Δt=6 \cdot 2\ kg \cdot m/s=12\ kg \cdot m/s.$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι το γινόμενο (δύναμη) επί (χρονικό διάστημα), μας επιτρέπει τον υπολογισμό της μεταβολής της ορμής του σώματος. Αλλά το γινόμενο αυτό δεν είναι τίποτα άλλο, παρά το εμβαδόν του γκρι ορθογωνίου στο διάγραμμα F-t. Με άλλα λόγια μπορούμε να εκμεταλλευθούμε το διάγραμμα F-t, αφού το χωρίο που σχηματίζεται, από την γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων, έχει εμβαδόν αριθμητικά ίσο με την αντίστοιχη μεταβολή της ορμής.

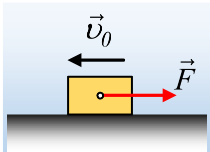


ii) Η παραπάνω μεταβολή της ορμής γράφεται:

$$\Delta p = p_1 - p_o \rightarrow p_o = p_1 - \Delta p = +4\ kg \cdot m/s - 12\ kg \cdot m/s = -8\ kg \cdot m/s \rightarrow$$

$$p_0 = m\upsilon_0 \ \rightarrow\ \upsilon_0 = \frac{p_0}{m} = \frac{-8}{2} m/s = -4 m/s$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας δείχνουν ότι τη στιγμή t_0=0, το σώμα κινείται με κατεύθυνση προς την αρνητική φορά του άξονα, οπότε για την ισχύ της δύναμης θα έχουμε:



$$P_0 = \frac{\Delta W}{\Delta t} = |F| \cdot |\upsilon_0| \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -|F| \cdot |\upsilon_0| = -6 \cdot 4W = -24W$$

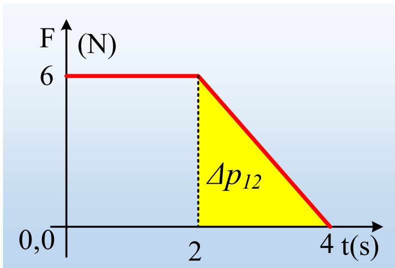
iii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από 0-t_1:

$$K_1 - K_0 = W_w + W_N + W_F \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = 0 + 0 + W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2} m \left(\frac{p_1}{m}\right)^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 J - \frac{1}{2} 2 \cdot 4^2 J = -12J$$

iv) Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο i) ερώτημα, το εμβαδόν του τριγώνου με κίτρινο χρώμα, στο διπλανό διάγραμμα, είναι αριθμητικά ίσο με την μεταβολή της ορμής του σώματος από τη στιγμή t_1=2s, έως την στιγμή t_2=4s. Έτσι θα έχουμε:



$$\Delta p_{12} = \frac{1}{2} \beta\upsilon = \frac{1}{2} 2 \cdot 6\ kg \cdot m/s = 6\ kg \cdot m/s \rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p_{12} \rightarrow p_2 = p_1 + \Delta p_{12} \rightarrow m\upsilon_2 = p_1 + \Delta p_{12}$$

$$\upsilon_2 = \frac{p_1 + \Delta p_{12}}{m} = \frac{4kg \cdot m/s + 6kg \cdot m/s}{2kg} = 5m/s$$

v) Όταν μιλάμε για το ρυθμό μεταβολής της ορμής τη στιγμή… αναφερόμαστε στον **στιγμιαίο** ρυθμό μεταβολής της ορμής, όπου:

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{\sigma\tau} = \frac{dp}{dt} = \Sigma F = F = 5kg \cdot m/s^2.$$

Ενώ για τον **μέσο** ρυθμό μεταβολής της ορμής στο χρονικό διάστημα 2s-4s, έχουμε:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{m\upsilon_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{10-4}{4-2} kg \cdot m / s^2 = 3kg \cdot m / s^2.$$

Αν κάποιος αναρωτιέται τι ακριβώς μετράει ο παραπάνω μέσος ρυθμός, αρκεί να παρατηρήσει ότι αυτή είναι η μέση δύναμη (από τα 6Ν στο μηδέν…) που ασκείται στο σώμα.

dmargaris@gmail.com