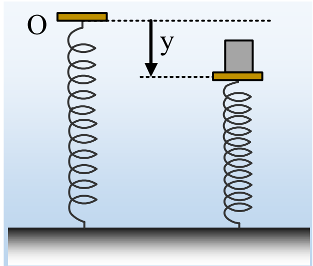
# Εμείς ασχολούμαστε με τον δίσκο!




Ένας δίσκος ηρεμεί στη θέση Ο, στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς k=100N/m, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος, όπως στο σχήμα, έχοντας συσπειρώσει το ελατήριο κατά 0,1m. Μια στιγμή (την οποία θεωρούμε ως t=0) αφήνουμε, χωρίς ταχύτητα, ένα σώμα Σ μάζας Μ=3kg, πάνω στο δίσκο, με αποτέλεσμα το σύστημα να ταλαντωθεί κατακόρυφα, ενώ στη θέση Β που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα, αφαιρούμε το σώμα Σ, με αποτέλεσμα να ακολουθήσει μια νέα ταλάντωση του δίσκου.

i) Να υπολογιστούν τα πλάτη των δύο παραπάνω ταλαντώσεων.

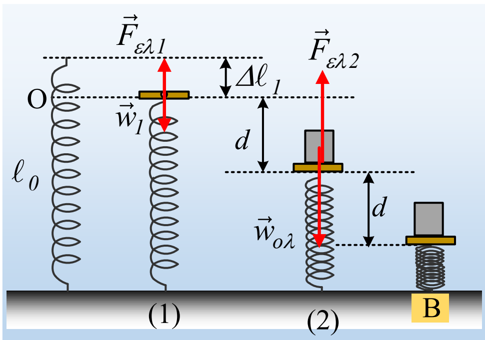
ii) Να βρεθεί η συνάρτηση y=f(t) της θέσης του δίσκου, σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου y=0 η αρχική θέση ισορροπίας του Ο και θετική η προς τα πάνω κατεύθυνση.

iii) Να παρασταθεί γραφικά παραπάνω συνάρτηση y=f(t), μέχρι τη στιγμή που ο δίσκος να επιστρέψει στην αρχική του θέση Ο (για πρώτη φορά).

iv) Για το ίδιο χρονικό διάστημα να παρασταθεί γραφικά η δύναμη του ελατηρίου η οποία ασκείται στο δίσκο, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

***Απάντηση:***




i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο δίσκο στη θέση ισορροπίας του (1), έχοντας συσπειρώσει το ελατήριο κατά $Δ\ell_1$ και οι δυνάμεις στο σύστημα δίσκος-σώμα Σ, στην δική του θέση ισορροπίας (2), χαμηλότερα κατά d. Από τις δύο ισορροπίες παίρνουμε:

(1): $ΣF=0 \rightarrow F_{ελ1}=w_1 \rightarrow m=\dfrac{kΔ\ell_1}{g}=\dfrac{100\cdot 0,1}{10}kg=1kg$

(2): $ΣF=0 \rightarrow F_{ελ2}=w_{ολ} \rightarrow (M+m)g=k(Δ\ell_1+d)\rightarrow$

$$d=\frac{Mg}{k}=\frac{3\cdot 10}{100}m=0,3m$$

Όμως η αρχική θέση ισορροπίας (1), η θέση Ο, είναι ακραία θέση για την ταλάντωση του συστήματος δίσκος-σώμα Σ, συνεπώς το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης είναι $A_1=d=0,3m$.

Εξάλλου το σύστημα δίσκος-σώμα θα φτάσει μέχρι την κάτω ακραία θέση Β, χαμηλότερα κατά d=0,3m, από τη θέση ισορροπίας του, οπότε αφαιρώντας το σώμα, ο δίσκος απέχει κατά 2d=0,6m από την θέση ισορροπίας του, έχοντας μηδενική ταχύτητα. Άρα θα εκτελέσει μια δεύτερη ταλάντωση με πλάτος $A_2=0,6m$.

ii) Το σύστημα των δύο σωμάτων (αντιμετωπίζοντάς το ως ένα σώμα) εκτελεί μια ΑΑΤ με κυκλική συχνότητα:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m_{o\lambda}}} = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{100}{1+3}} rad/s = 5rad/s$$

Οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του από την θέση ισορροπίας του (2) έχει τη μορφή:

$$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega_1 t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0 \to x=+A_1} A_1 = A_1 \eta\mu(\omega_1 \cdot 0 + \varphi_0) \to \eta\mu\varphi_0 = 1 \to$$

$$x_1 = 0,3 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Αλλά τότε η θέση του, μετρούμενη από την θέση O, θα δίνεται από την εξίσωση:

$$y = -0,3 + x_1 = -0,3 + 0,3 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.) \quad \mu\varepsilon\ t \le \frac{T_1}{2} \text{ ή } t \le 0,2\pi\ (s) \quad (1)$$

Μετά την απομάκρυνση του σώματος Σ, ο δίσκος εκτελεί μια δεύτερη ταλάντωση, από την ακραία αρνητική απομάκρυνσή του, με πλάτος $A_2$=0,6m και με νέα κυκλική συχνότητα

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} rad/s = 10rad/s \to$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega_2 \Delta t + \theta_0) \xrightarrow{\Delta t=0 \to x=-A_2} -A_2 = A_2 \eta\mu(\omega_2 \cdot 0 + \theta_0) \to \eta\mu\theta_0 = -1 \to$$

$$x_2 = 0,3 \cdot \eta\mu\left(10\Delta t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

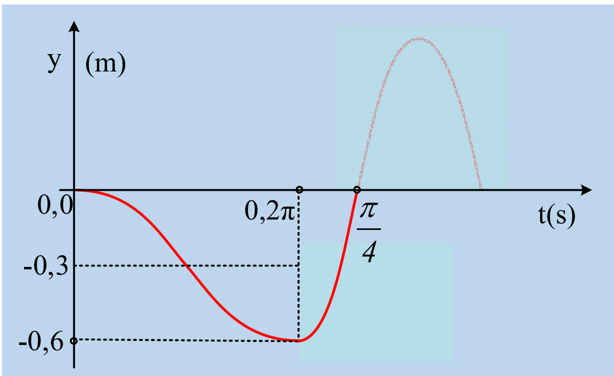
Όπου $\Delta t = t - t_1 = t - 0,2\pi$ ενώ η απομάκρυνση $x_2$ μετριέται από την θέση ισορροπίας O, οπότε τελικά:

$$y = 0,6 \cdot \eta\mu\left(10(t - 0,2\pi) + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,6 \cdot \eta\mu\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)\ \mu\varepsilon\ t \ge 0,2\pi\ (s) \quad (2)$$

Με βάση τις παραπάνω συναρτήσεις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο δίσκος θα επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του σε χρονικό διάστημα Δt= ¼ $T_2$= ¼ 0,2π (s), μετά την αφαίρεση του σώματος Σ, δηλαδή τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = 0,2\pi + {}^{0,2\pi}\!/_{4} = \frac{\pi}{4} s$$

Σχεδιάζουμε την παρακάτω γραφική παράσταση y-t:



iii) Στο χρονικό διάστημα 0 έως 0,2π s έχουμε για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\Sigma F = -Dx \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - (m+M)g = -kx_1 \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = 40 - 30 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

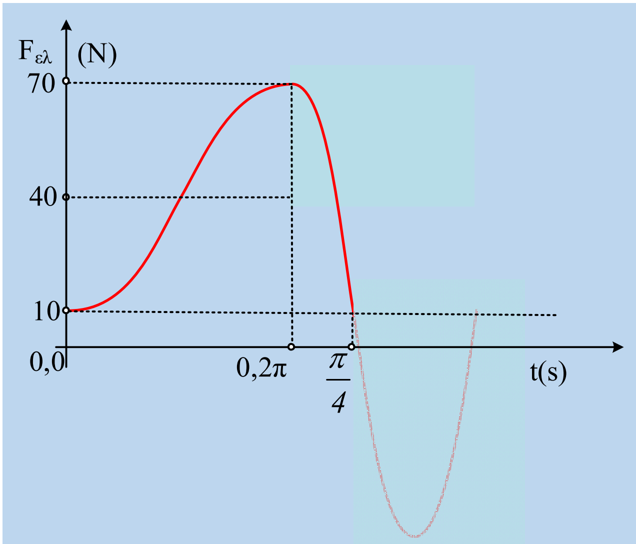
Βέβαια στο διάστημα αυτό, η δύναμη του ελατηρίου ασκείται στο δίσκο…

Στο χρονικό διάστημα από 0,2π s – 0,25π s έχουμε:

$$\Sigma F = -Dx \rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg = -kx_2 \rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = mg - kA_2 \cdot \eta\mu\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = 10 - 60 \cdot \eta\mu\eta\mu\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (S.I.)$$

Με βάση τα παραπάνω, η ζητούμενη γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται ο δίσκος από το ελατήριο, έχει τη μορφή του σχήματος:




dmargaris@gmail.com