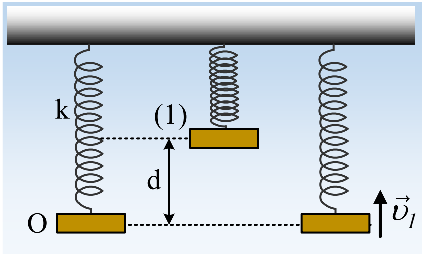
Ενέργειες και επιτάχυνση στην φθίνουσα ταλάντωση



Μια πλάκα μάζας m ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς k, όπως στο σχήμα, στη θέση O. Ανεβάζουμε το σώμα κατακόρυφα κατά d=2mg/k, φέρνοντάς στη θέση (1) και κάποια στιγμή το αφήνουμε να κινηθεί, χωρίς να του προσδώσουμε κάποια αρχική ταχύτητα. Η πλάκα ταλαντώνεται δεχόμενη δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_α=-bυ$.

i) Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη διάρκεια της ταλάντωσης, έχει τιμή:

$$α)\ U_{ελ,max}=\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k},\quad β)\ \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}<U_{ελ,max}<\frac{9}{2}\frac{m^2g^2}{k},\quad γ)\ U_{ελ,max}=\frac{9}{2}\frac{m^2g^2}{k}$$

ii) Η μέγιστη κινητική ενέργεια την οποία αποκτά το σώμα, στη διάρκεια της ταλάντωσής του έχει τιμή:

$$α)\ K_{max}<\frac{2m^2g^2}{k},\quad β)\ K_{max}=\frac{2m^2g^2}{k},\quad γ)\ K_{max}>\frac{2m^2g^2}{k}$$

iii) Κάποια στιγμή η πλάκα περνάει από την θέση O με ταχύτητα μέτρου $υ_1$, με φορά προς τα πάνω. Τη στιγμή αυτή:

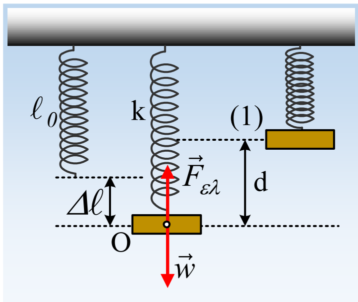
α) Έχει επιτάχυνση με φορά προς τα πάνω.

β) Έχει επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω.

γ) Δεν έχει επιτάχυνση.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Απάντηση:



i) Σχεδιάζουμε τι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας, όπως στο σχήμα. Από την συνθήκη ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \to F_{ελ}=mg \to k\Delta\ell=mg \to$$

$$\Delta\ell=\frac{mg}{k}$$

Αλλά τότε το αρχικό πλάτος ταλάντωσης είναι $A_0=d=2\Delta\ell$ και το ελατήριο στην θέση (1) έχει συσπειρωθεί κατά $d-\Delta\ell=\Delta\ell$.

Αν η ταλάντωση ήταν αμείωτη, τότε το σώμα θα ερχόταν στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, σε απομάκρυνση $y=-A_0$, όπου το ελατήριο θα είχε μέγιστη επιμήκυνση $\Delta\ell_{max}=\Delta\ell+d=3\Delta\ell$, με αποτέλεσμα το ελατήριο να αποκτούσε μέγιστη δυναμική ενέργεια:

$$U_{ελ,αμ}=\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell_{max}\right)^2=\frac{1}{2}k\left(3\Delta\ell\right)^2=\frac{1}{2}k\cdot 9\cdot\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{9}{2}\frac{m^2g^2}{k}$$

Η παρουσία όμως της δύναμης απόσβεσης, καθιστά φθίνουσα την ταλάντωση, οπότε το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται και η μέγιστη ενέργεια του ελατηρίου θα είναι μικρότερη από $\frac{9}{2}\frac{m^2g^2}{k}$, θα είναι όμως μεγαλύτερη από $\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}$, αφού το σώμα θα κατέβει κάτω από την θέση ισορροπίας, οπότε:

$$U_{ελ,max}=\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell+y\right)^2>\frac{1}{2}k\left(\Delta\ell\right)^2=\frac{1}{2}k\cdot\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}$$

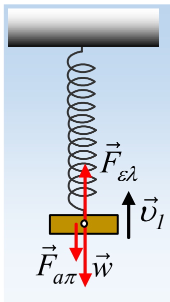
Σωστή η β) πρόταση.

ii) Η αρχική ενέργεια ταλάντωσης έχει τιμή:

$$E_0=\frac{1}{2}kA_0^2=\frac{1}{2}k\left(2\Delta\ell\right)^2=\frac{1}{2}k\cdot 4\cdot\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{2m^2g^2}{k}$$

Αλλά την μέγιστη κινητική ενέργεια, την αποκτά το σώμα, κατά την προς τα κάτω κίνησή του, όταν για πρώτη φορά ΣF=0. Αλλά τότε αυτή θα είναι μικρότερη από E_0, αφού το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι αρνητικό, πράγμα που σημαίνει ότι μέχρι τη θέση αυτή ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική. Σωστό το α).

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην πλάκα καθώς περνά από την θέση ισορροπίας Ο.



Αλλά σύμφωνα με την ανάλυση της i) ερώτησης $\vec{F}_{ελ}+\vec{w}=0$, οπότε τελικά η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με την δύναμη απόσβεσης $F_{απ}=-b\upsilon_1$, αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα, εξαιτίας της οποίας η πλάκα αποκτά επιτάχυνση με φορά προς τα κάτω. Σωστό το β).

dmargaris@gmail.com