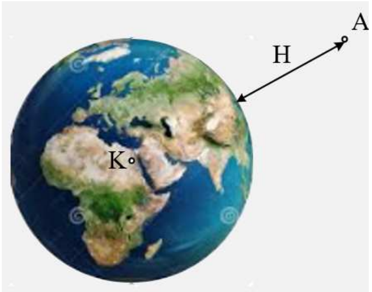
Ομογενές και μη βαρυτικό πεδίο της Γης.



Ένα σώμα μάζας m=2kg αφήνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$, ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα, σε ένα σημείο Α, σε ύψος $H=R_Γ$, από την επιφάνεια της Γης.

i) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει.

ii) Να υπολογιστεί η μετατόπιση του σώματος και η ταχύτητά του την χρονική στιγμή $t_1=4s$.

iii) Να υπολογισθεί το έργο του βάρους από t_0 έως τη στιγμή t_1.

iv) Το σώμα θα φτάσει στη Γη τη χρονική στιγμή t_2, όπου:

$$α)\ t_2 < 1600\sqrt{2}\ s, \quad β)\ t_2 = 1600\sqrt{2}\ s, \quad γ)\ t_2 > 1600\sqrt{2}\ s$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

v) Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει το σώμα στην επιφάνεια της Γης.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0=10m/s^2$, η ακτίνα της Γης $R_Γ=6.400km$, ενώ δεν λαμβάνουμε υπόψη την επίδραση της ατμόσφαιρας στην κίνηση του σώματος.

Απάντηση:

i) Η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης, στο σημείο Α, ίση με την επιτάχυνση που θα αποκτήσει ένα σώμα, αν αφεθεί να κινηθεί, δίνεται από την εξίσωση:

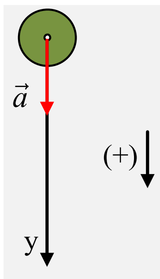
$$g = G\frac{M_Γ}{r^2} \quad (1)$$

Όπου r η απόσταση του σημείου Α από το κέντρο της Γης. Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω εξίσωση για ένα σημείο Γ, στην επιφάνεια της Γης, θα πάρουμε:

$$g_Γ = g_o = G\frac{M_Γ}{R_Γ^2} \rightarrow GM_Γ = g_o R_Γ^2 \quad (1.1) \xrightarrow{(1)}$$

$$g_A = G\frac{M_Γ}{(2R_Γ)^2} = \frac{g_o R_Γ^2}{4R_Γ^2} = \frac{1}{4}g_o \rightarrow$$

$$g_A = \frac{1}{4}10m/s^2 = 2{,}5m/s^2.$$



ii) Μέσα σε χρονικό διάστημα 4s, το σώμα θα διανύσει κάποια μικρή απόσταση, οπότε μπορούμε να δεχτούμε ότι η κίνηση γίνεται με σταθερή επιτάχυνση, μέσα σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση $α=g_A$. Αλλά τότε η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη για την οποία ισχύουν:

$$υ=α\cdot t \quad (2) \quad \text{και} \quad Δy= ½\, α\cdot t^2 \quad (3).$$

Με αντικατάσταση $t=t_1=4s$, βρίσκουμε:

$$υ_1=2{,}5\cdot 4\ m/s= 10m/s \ \ και$$

$$\Delta y = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 4^2 m = 20m$$

iii) Το έργο του βάρους στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης, είναι ίσο:

$$W_1 = w \cdot \Delta y \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = mg \cdot \Delta y = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 20J = 100J$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ, αφού έχουμε υπολογίσει την τελική ταχύτητα:

$$K_1 - K_o = W_w \to W_w = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 - 0 = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^2 J = 100J$$

iv) Αν η κίνηση του σώματος, μέχρι να φτάσει στην επιφάνεια της Γης, σημείο Γ, γινόταν με την αρχική επιτάχυνση (g_A), θα είχαμε μια κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε από την εξίσωση (3) θα παίρναμε:

$$\Delta y = \frac{1}{2} at^2 \to t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R_\Gamma}{g_A}} \to$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.400 \cdot 10^3 m}{2{,}5 m/s^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 64 \cdot 10^6}{25}} s = 1600\sqrt{2} s$$

Όμως καθώς το σώμα πέφτει, η επιτάχυνση της βαρύτητας αυξάνεται, οπότε αυξάνεται και η ταχύτητα που αποκτά το σώμα, με αποτέλεσμα να φτάνει γρηγορότερα στην επιφάνεια της Γης. Έτσι ο απαιτούμενος χρόνος είναι μικρότερος από αυτόν που υπολογίσαμε παραπάνω και σωστή απάντηση είναι η α).

v) Με βάση τα παραπάνω, η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη, οπότε δεν θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε με τις εξισώσεις (2) και (3). Δεν μένει παρά να εργαστούμε ενεργειακά.
Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των σημείων Α και Γ:

$$K_\Gamma - K_A = W_{A\to\Gamma} \to \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - 0 = m\left(V_A - V_\Gamma\right) \to \frac{1}{2}\upsilon_2^2 = -G\frac{M_\Gamma}{r_A} - \left(-G\frac{M_\Gamma}{r_\Gamma}\right) \to$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2GM_\Gamma\left(\frac{1}{r_\Gamma} - \frac{1}{r_A}\right)} \xrightarrow{(1.1)} \upsilon_2 = \sqrt{2g_o R_\Gamma^2\left(\frac{1}{R_\Gamma} - \frac{1}{2R_\Gamma}\right)} \to$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{g_o R_\Gamma} = \sqrt{10 \cdot 6.400 \cdot 10^3} m/s = 8.000 m/s$$

dmargaris@gmail.com