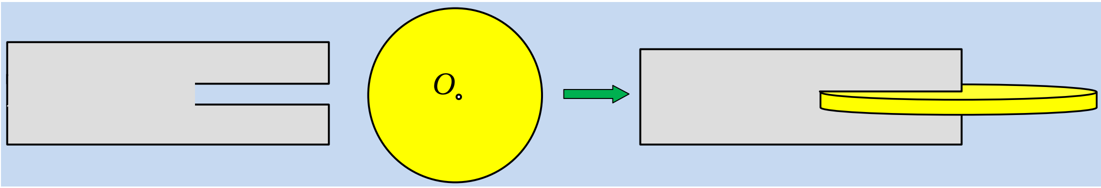
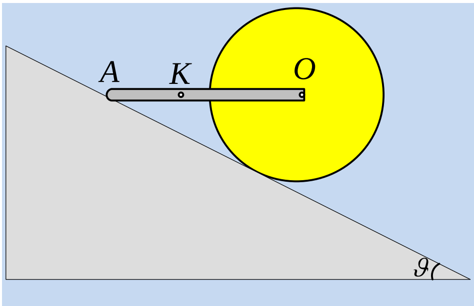
Ένας «οδοστρωτήρας» σε κεκλιμένο επίπεδο.

Διαθέτουμε ένα ομογενή κύλινδρο μάζας m=20kg και ακτίνας R=0,5m, τον οποίο προσαρμόζουμε σε ένα δοκάρι, μάζας M=40kg και μήκους ℓ= 1m, στο οποίο έχουμε δημιουργήσει μια εγκοπή, όπως στο σχήμα:



Έτσι κατασκευάζουμε έναν «οδοστρωτήρα» τον οποίο τοποθετούμε σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, με γωνία κλίσεως $\theta=30^o$.



Το κέντρο μάζας Κ της δοκού απέχει από το άκρο Α απόσταση (ΑΚ)=0,3m. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα, το οποίο αρχίζει να κινείται προς τα κάτω με τον κύλινδρο να κυλίεται και να διανύει απόσταση 2m σε χρονικό διάστημα 2s.

Δίνονται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I=\frac{1}{2}mR^2$, $g=10m/s^2$ ενώ να θεωρείστε ότι ημθ=0,5 και συνθ=0,87.

i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου, καθώς και την γωνιακή του επιτάχυνση.

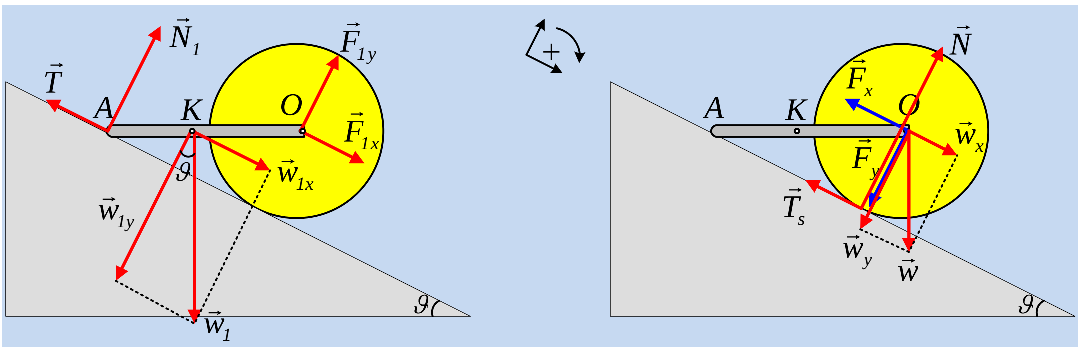
ii) Να υπολογίσετε την τριβή που θα ασκηθεί στη δοκό, στο άκρο της Α.

iii) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η δοκός από τον άξονα του κυλίνδρου στο άκρο της Ο.

iv) Ποιο στερεό, ο κύλινδρος ή η δοκός συνεισφέρει περισσότερο στο «στρώσιμο» του δρόμου;

Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο δοκάρι και στον κύλινδρο.



Όπου F_{1x} και F_{1y} οι συνιστώσες της δύναμης που ασκεί ο άξονας του κυλίνδρου στη δοκό, η πρώτη παράλληλη στο επίπεδο και η δεύτερη κάθετη σε αυτό. Οι αντίστοιχες συνιστώσες στον κύλινδρο είναι η F_x και F_y. Οι παραπάνω δυνάμεις μεταξύ δοκού-κυλίνδρου είναι εσωτερικές για το σύστημα (δράση-αντίδραση) συνεπώς το σύστημα κινείται με την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων.

Η κίνηση του συστήματος λοιπόν περιγράφεται από τους νόμους του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=(M+m)\cdot\alpha_{cm} \rightarrow mg\cdot\eta\mu\theta+Mg\cdot\eta\mu\theta-T_s-T=(M+m)\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση κυλίνδρου: $\Sigma\tau_O=I_{cm}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_s\cdot R=\frac{1}{2}mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Όμως κατά τη μεταφορική κίνηση όλα τα σημεία και της δοκού και του κυλίνδρου έχουν την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση. Συνεπώς και ο άξονας του κυλίνδρου έχει επιτάχυνση παράλληλη με το επίπεδο με μέτρο α_{cm} και αφού ο κύλινδρος κυλίεται $\alpha_O=\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$, οπότε με αντικατάσταση στην (2) και στη συνέχεια με πρόσθεση κατά μέλη θα πάρουμε:

$$mg\cdot\eta\mu\theta+Mg\cdot\eta\mu\theta-T=(M+m)\cdot\alpha_{cm}+\frac{1}{2}m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm}=\frac{(M+m)g\cdot\eta\mu\theta-T}{M+1{,}5m} \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) μας λέει ότι η επιτάχυνση με την οποία ο «οδοστρωτήρας» μας κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι σταθερή, συνεπώς η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε:

i) Η μετατόπιση του συστήματος δίνεται από την εξίσωση $x=\frac{1}{2}\alpha_{cm}\cdot t^2 \rightarrow$

$$a_{cm}=\frac{2x}{t^2}=\frac{2\cdot 2m}{2^2 s^2}=1m/s^2$$

Και αφού ο κύλινδρος κυλίεται $a_{\gamma\omega\nu}=\frac{a_{cm}}{R}=\frac{1}{0{,}5}rad/s^2=2rad/s^2$.

ii) Επιστρέφοντας τώρα στη σχέση (3) και λύνοντας ως προς T παίρνουμε:

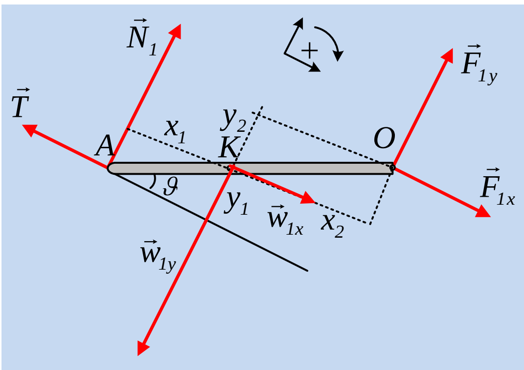
$$T=mg\cdot\eta\mu\theta+Mg\cdot\eta\mu\theta-(M+1{,}5m)\cdot\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$T=20\cdot 10\cdot 0{,}5N+40\cdot 10\cdot 0{,}5-(40+1{,}5\cdot 20)\cdot 1N=230N$$

iii) Κατά την προς τα κάτω κίνηση του «οδοστρωτήρα» μας, η δοκός εκτελεί μεταφορική κίνηση χωρίς να περιστρέφεται. Αν υπολογίσουμε τη γωνία που σχηματίζει η δοκός με το κεκλιμένο επίπεδο, βρίσκουμε:

$$\eta\mu\phi=\frac{R}{\ell}=\frac{0{,}5m}{1m}=0{,}5=\eta\mu\theta$$

Δηλαδή η δοκός παραμένει οριζόντια κατά την κίνηση του συστήματος.



Η κίνηση της δοκού περιγράφεται με βάση τους νόμους του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1+F_{1y}-Mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F_{1x}+Mg\cdot\eta\mu\theta-T=M\cdot\alpha \quad (2)$$

$$\Sigma\tau_K=0 \rightarrow N_1\cdot x_1+T\cdot y_1-F_{1y}\cdot x_2+F_{1x}\cdot y_2=0 \quad (3)$$

Αλλά από την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$F_{1x}= M\cdot\alpha\ -Mg\cdot\eta\mu\theta+T= 40\cdot 1N-40\cdot 10\cdot 0,5N+230N=70N$$

Ενώ με βάση την τριγωνομετρία η (3) γράφεται:

$$N_1\cdot(AK)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+T\cdot(AK)\cdot\eta\mu\theta-F_{1y}\cdot(OK)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+F_{1x}\cdot(OK)\cdot\eta\mu\theta =0 \ \rightarrow$$

$$N_1\cdot 0,3\cdot 0,87+T\cdot 0,3\cdot 0,5-F_{1y}\cdot 0,7\cdot 0,87+F_{1x}\cdot 0,7\cdot 0,5=0 \rightarrow$$

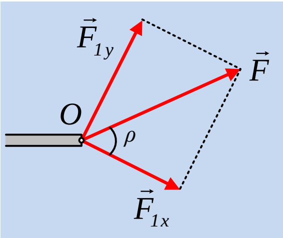
$$0,61\cdot F_{1y}-0,26N_1 =59\ (3^{\alpha})$$

Οπότε τώρα οι εξισώσεις (1) και (3α) αποτελούν σύστημα και με αντικατάσταση έχουμε:

$F_{1y}+N_1 =348$ (1^{α}) και

$0,61\cdot F_{1y}-0,26N_1 =59$ (3^{α})

Από όπου βρίσκουμε $N_1 \approx 176$ N και $F_{1y} \approx 172$N.



Αλλά τότε η δύναμη F που δέχεται η δοκός από τον κύλινδρο έχει μέτρο:

$$F=\sqrt{F_{1x}^2+F_{1y}^2}=\sqrt{70^2+172^2}N=185,5N$$

Ενώ σχηματίζει με το κεκλιμένο επίπεδο γωνία ρ με:

$$\varepsilon\varphi\rho=\frac{F_{1y}}{F_{1x}}=\frac{172}{70}=2,45$$

iv) Από την ισορροπία του κυλίνδρου στην διεύθυνση την κάθετη στο επίπεδο παίρνουμε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow$$

$$N=mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+F_y=20\cdot 10\cdot 0,87N+172N=346\ N.$$

Συνεπώς ο κύλινδρος πιέζει το κεκλιμένο επίπεδο με δύναμη N΄=346N, ενώ η δοκός με δύναμη N_1΄=176 N.

Συνεπώς περισσότερο «βοηθάει» στο στρώσιμο ο κύλινδρος, παρά η δοκός!!!

dmargaris@sch.gr