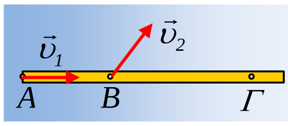
Γιατί το «να κόβεις δρόμο» είναι καλό…

Αρκεί να μην χαθεί το μονοπάτι…

Μόνο για Καθηγητές.

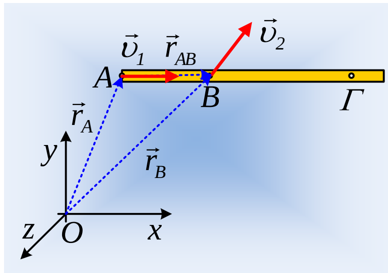


Μια ράβδος ΑΒ κινείται οριζόντια σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή το άκρο Α, έχει ταχύτητα μέτρου υ_1=1m/s, όπως στο σχήμα. Την ίδια στιγμή το σημείο Β, το οποίο απέχει από το Α κατά (ΑΒ)=1m, έχει ταχύτητα υ_2 η οποία σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα της ράβδου.

Να βρεθεί η ταχύτητα, τη στιγμή αυτή, του σημείου Γ, αν (ΑΓ)=3m;

Απάντηση:

Λίγη θεωρία πρώτα…



Παίρνοντας ένα σύστημα αξόνων, για τις θέσεις των σημείων Α και Β έχουμε:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$$

Με παραγώγιση παίρνουμε:

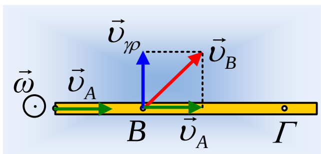
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \quad (1)$$

Όμως τα σημεία Α και Β, είναι σταθερά σημεία της ράβδου με σταθερή απόσταση μεταξύ τους και η μεταβολή $d\vec{r}_{AB}$ θα οφείλεται μόνο στην περιστροφή του ευθυγράμμου τμήματος. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα $\vec{r}_{AB}$ στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο του Α, θα έχουμε ότι:

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

Και η σχέση (1) γίνεται:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \, (2)$$



Η εξίσωση (2) μας λέει ότι η ταχύτητα του σημείου Β υπολογίζεται ως το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας του σημείου Α και της «γραμμικής» ταχύτητας του Β, για περιστροφή του με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από το σημείο Α.

Με άλλα λόγια μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σημείου Β, θεωρώντας ότι η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη. Μια μεταφορική με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A$ και μια περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από το σημείο Α!

Έχουμε συνηθίσει να αντιμετωπίζουμε τη σύνθετη κίνηση ως επαλληλία μιας μεταφορικής του κέντρου μάζας με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{cm}$ και μια στροφική με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από το άξονα που περνά από το κέντρο μάζας.

Βλέπουμε ότι το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σταθερό σημείο της ράβδου!!!

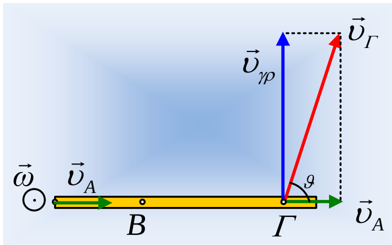
……………………………

Πάμε τώρα στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Με βάση το προηγούμενο σχήμα το παραλληλόγραμμο των ταχυτήτων του σημείου Β, είναι τετράγωνο, οπότε $\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_A=\upsilon_1$. Έτσι:

$$\upsilon_1 = \omega\cdot(AB) \rightarrow \omega = \frac{\upsilon_1}{(AB)} = 1 rad/s.$$

Αλλά με την ίδια συλλογιστική για την ταχύτητα του σημείου Γ έχουμε με βάση το διπλανό σχήμα, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot(A\Gamma)$:

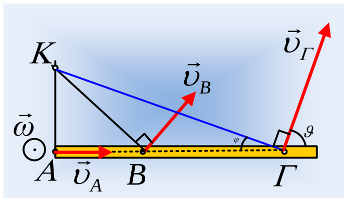


$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{(\upsilon_A)^2+(\upsilon_{\gamma\rho})^2} = \sqrt{1^2+3^2}\, m/s = \sqrt{10} m/s$$

$$\text{Με } \varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{\upsilon_A} = 3$$

Υπήρχαν άλλες εναλλακτικές λύσεις; Βεβαίως υπάρχουν, ας δούμε δύο άλλες:

1) Θεωρούμε την κίνηση μόνο στροφική με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το σημείο Κ, σημείο που τέμνονται οι κάθετες στις ταχύτητες των σημείων Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αλλά το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε:



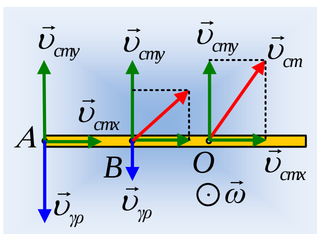
$$(AK)=1m, \text{ και } (K\Gamma) = \sqrt{(AK)^2+(A\Gamma)^2} = \sqrt{1+3^2}\, m = \sqrt{10} m$$

$$\text{Αλλά } \upsilon_A = \omega\cdot(AK) \rightarrow \omega = \frac{\upsilon_A}{(AK)} = 1 rad/s.$$

$$\text{Και } \upsilon_\Gamma = \omega\cdot(K\Gamma) \rightarrow \upsilon_\Gamma = 1\cdot\sqrt{10} m/s = \sqrt{10} m/s$$

$$\text{Ενώ } \varepsilon\varphi\varphi = \frac{(AK)}{(A\Gamma)} = \frac{1}{3}, \text{ οπότε } \varepsilon\varphi\vartheta = 3 \text{ (συμπληρωματικές γωνίες).}$$

2) Θεωρούμε, κατά τα γνωστά σύνθετη κίνηση γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο της ράβδου, το οποίο απέχει κατά x από το Α. Με βάση το διπλανό σχήμα:

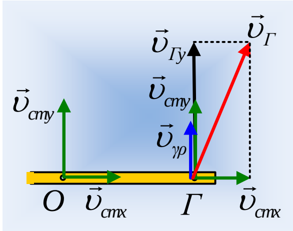


$$\upsilon_{cmy}=\upsilon_{\gamma\rho/A}=\omega\cdot x \quad (3)$$

και για το σημείο Β (τετράγωνο):

$$\upsilon_{cmx}=\upsilon_{cmy}-\upsilon_{\gamma\rho/B} \rightarrow \upsilon_A=\upsilon_{cmy}-\omega(x-1) \rightarrow \upsilon_A=\omega x-\omega x+\omega \rightarrow \omega=1rad/s.$$

Πάμε στο σημείο Γ:



$$\upsilon_{\Gamma y}=\upsilon_{cmy}+\omega(3-x)=\omega x+3\omega-\omega x=3\omega=3m/s$$

οπότε $\upsilon_\Gamma=\sqrt{(\upsilon_{cmx})^2+(\upsilon_{\Gamma y})^2}=\sqrt{1^2+3^2}m/s=\sqrt{10}m/s$

και $\varepsilon\varphi\vartheta=\dfrac{\upsilon_{\Gamma y}}{\upsilon_{cmx}}=3$

Σχόλια.

1) Τι λέτε συνάδελφοι; Δεν είναι πολύ καλύτερη η πρώτη λύση; Νομίζω αναμφισβήτητα!

2) Προσοχή όμως στις γενικεύσεις. Αυτά ισχύουν για τις ταχύτητες. Αλλά «να μην χαθεί το μονοπάτι….». Δεν ισχύουν για τις επιταχύνσεις ή για να εφαρμόσουμε το 2^o νόμο της στροφικής κίνησης. Πότε μπορούμε να εφαρμόσουμε και πότε όχι το 2^o νόμο, μπορείτε να δείτε την ανάρτηση:

Παίζοντας με το 2ο νόμο για την περιστροφική κίνηση.

dmargaris@gmail.com