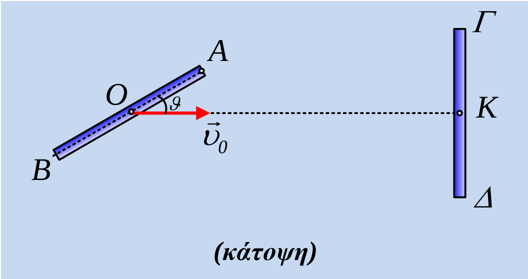
Δυο ράβδοι συγκρούονται ελαστικά.

Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα $υ_O=υ_A=υ_0$=3,5m/s μια οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ=1m, όπου Ο το μέσον της. Μια δεύτερη όμοια ράβδος ΓΔ ηρεμεί όπως στο σχήμα, όπου η διεύθυνση της ταχύτητας του σημείου Ο, είναι κάθετη στην ΓΔ, στο μέσον της Κ. Οι δυο ράβδοι συγκρούονται ελαστικά.



(κάτοψη)

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου Β της πρώτης ράβδου, πριν την κρούση.

ii) Να εξηγείστε γιατί μετά την κρούση καμιά ράβδος δεν θα εκτελέσει μεταφορική κίνηση.

iii) Ποια ράβδος θα αποκτήσει μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα; Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.

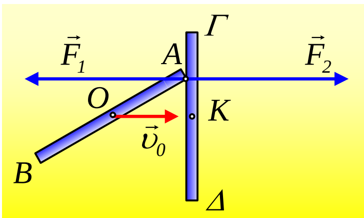
iv) Αν το μέσον Κ της ράβδου ΓΔ αποκτήσει, αμέσως μετά την κρούση, ταχύτητα μέτρου $υ_2$=2m/s, να υπολογίστε την τελική ταχύτητα του μέσου Ο και τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ΑΒ.

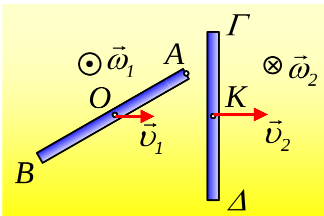
Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=\frac{1}{12}m\ell^2$.

Απάντηση:

i) Αφού τα σημεία Ο και Α έχουν την ίδια ταχύτητα, το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ μεταφέρεται χωρίς να περιστρέφεται, οπότε και η ράβδος εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση. Άρα και το άκρο Β έχει επίσης ταχύτητα $υ_B=υ_o$=3,5m/s παράλληλη της ταχύτητας του κέντρου μάζας Ο.

ii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο ράβδους, κάθετες στην επιφάνεια επαφής, συνεπώς κάθετες στην δεύτερη ράβδο. Αλλά τότε σε κάθε ράβδο στη διάρκεια της κρούσης ασκείται ροπή ως προς το μέσον της, με αποτέλεσμα να αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση και να περιστραφεί. Έτσι μετά την κρούση οι ράβδοι θα εκτελέσουν σύνθετη κίνηση.





(μετά)

iii) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στις ράβδους στη διάρκεια της κρούσης, τα βάρη και οι κάθετες αντιδράσεις του επιπέδου, δεν εμφανίζουν ροπή, ως προς το κέντρο μάζας κάθε ράβδου. Άρα η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή. Ας εφαρμόσουμε λοιπόν την Α.Δ.Σ, ως προς το μέσον Κ της δεύτερης ράβδου:

$$\vec{L}_{πρ}=\vec{L}_{μετ}\rightarrow$$

$$0=I_1\cdot ω_1-I_2\cdot ω_2\ \rightarrow$$

$$\omega_1=\omega_2$$

με κατευθύνσεις όπως στο παραπάνω σχήμα.[1]

iv) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση, παίρνουμε (ας τονίσουμε εδώ, ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση, έχουν την διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας, συνεπώς και οι ταχύτητες μετά την κρούση θα βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση):

$$\vec{P}_{\pi\rho}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau}\rightarrow$$

$$m_1\upsilon_o=m_1\cdot\upsilon_1+m_2\cdot\upsilon_2\rightarrow$$

$$\upsilon_1=\upsilon_o-\upsilon_2=3{,}5m/s-2m/s=1{,}5m/s$$

Αλλά αφού η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια πριν την κρούση, είναι ίση με την κινητική ενέργεια μετά την κρούση:

$$K_{\pi\rho\iota\nu}=K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

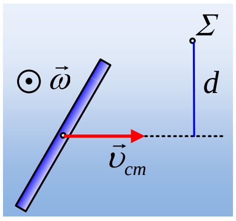
Αλλά $m_1=m_2=m$, $\omega_1=\omega_2=\omega$ και $I_1=I_2=\frac{1}{12}m\ell^2$ και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$m\upsilon_o^2=m\upsilon_1^2+m\upsilon_2^2+\frac{1}{12}m\ell^2\omega^2+\frac{1}{12}m\ell^2\omega^2\rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{6\left(\upsilon_o^2-\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right)}{\ell^2}}=\sqrt{6\left(3{,}5^2-1{,}5^2-2^2\right)}rad/s=6rad/s.$$

Σχόλια:

[1]Αξίζει να σημειωθεί ότι η στροφορμή ενός στερεού ως προς ένα σημείο Σ είναι ίση με $L=m\upsilon_{cm}d+I_{cm}\omega$, όπου d η απόσταση του σημείου Σ από τον φορέα της ταχύτητας του κέντρου μάζας, όπως στο διπλανό σχήμα. Οπότε, όπως παραπάνω πήραμε σαν κοινό σημείο υπολογισμού της στροφορμής το σημείο Κ, θα μπορούσαμε να λάβουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας που ενώνει τα κέντρα μάζας Ο και Κ των δύο ράβδων.



1) Αν όμως όλα τα παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν ότι «ξεφεύγουν» από τα πλαίσια του σχολικού βιβλίου, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε και ως εξής:

   Σε κάθε ράβδο ασκείται ροπή ως προς κατακόρυφο άξονα που περνάει από το μέσον της με μέτρο $\tau_1=F_1\cdot d=\tau_2=F_2\cdot d$. Σαν αποτέλεσμα της δράσης **κάθε** ροπής μεταβάλλεται η στροφορμή **κάθε** ράβδου με ρυθμό $\frac{dL}{dt}=\tau$, ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της. Αλλά αφού οι ροπές έχουν το ίδιο μέτρο, θα έχουμε και, κάθε στιγμή, ίσους **κατά μέτρο** ρυθμούς μεταβολής των αντίστοιχων στροφορμών. Αλλά αν αυτό συμβαίνει κάθε στιγμή (οι δυνάμεις F_1 και F_2 δεν είναι σταθερές) και οι αντίστοιχες μεταβολές των στροφορμών θα έχουν ίσα μέτρα:

$$\left|\Delta L_1\right| = \left|\Delta L_2\right| \rightarrow$$

$$\left|I_{cm1}\omega_1 - 0\right| = \left|I_{cm2}\omega_2 - 0\right|$$

$$\omega_1 = \omega_2$$

2) Αλλά την παραπάνω λογική θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε ώστε να συνδέσουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της δεύτερης ράβδου με την ταχύτητα του κέντρου μάζας της υ_2.

Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\frac{dP_2}{dt} = F_2$$

Ενώ από τον αντίστοιχο νόμο για την στροφική κίνηση:

$$\frac{dL_2}{dt} = \tau_2 = F_2(AK) \rightarrow$$

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{dP_2}{dt}(AK)$$

Αλλά αν αυτό ισχύει για κάθε στιγμή, τότε και συνολικά η μεταβολή της στροφορμής της ράβδου ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της και η μεταβολή της ορμής του κέντρου μάζας, θα συνδέονται επίσης με τη σχέση:

$$\Delta L = \Delta P \cdot (AK) \rightarrow (I_{cm}\omega_2 - 0) = (m\upsilon_2 - 0) \cdot (AK) \rightarrow$$

$$\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 = m\upsilon_2 \cdot \frac{\ell}{4} \rightarrow$$

$$\ell\omega_2 = 3\upsilon_2 \quad (1) \rightarrow$$

$$\omega_2 = \omega = 6 rad/s$$

3) Την παραπάνω λογική βέβαια θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και στην περίπτωση που δεν μας δινόταν η τιμή της υ_2! Η σχέση (1) μαζί με τις εξισώσεις που παραπάνω προέκυψαν από την Α.Δ.Ο, την Α.Δ.Σ. και την διατήρηση της ενέργειας, θα μας οδηγούσαν και στον υπολογισμό της ταχύτητας υ_2, η τιμή της οποίας δόθηκε στα δεδομένα για ευκολότερη λύση.

dmargaris@gmail.com