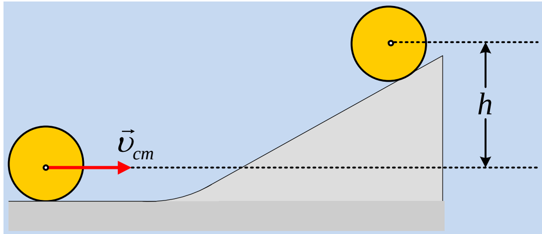
Η άνοδος μιας σφαίρας.



Μια σφαίρα μάζας 1kg κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm}=4m/s και στην πορεία της συναντά ένα κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως θ=30°, κατά μήκος του οποίου συνεχίζει την κίνησή της. Η κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου έχει εξομαλυνθεί ώστε να μην διαταραχθεί το ομαλό πέρασμά της από το ένα επίπεδο στο άλλο. Αν η προς τα πάνω κίνηση της σφαίρας σταματήσει όταν το κέντρο της Ο ανέβει κατά h=1m, τότε:

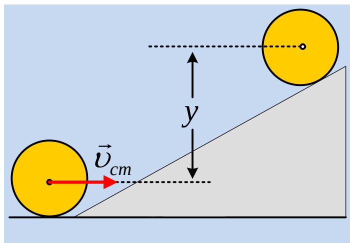
i) Να αποδείξετε ότι κατά την άνοδό της στο κεκλιμένο επίπεδο, η σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής από το επίπεδο.

ii) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που σταματά η άνοδός της στο κεκλιμένο επίπεδο.

iii) Να υπολογιστεί το έργο της ασκούμενης τριβής κατά την άνοδο της σφαίρας.

Για την σφαίρα ως προς μια διάμετρό της Ι= $\frac{2}{5}mR^2$ και g=10m/s^2.

Απάντηση:



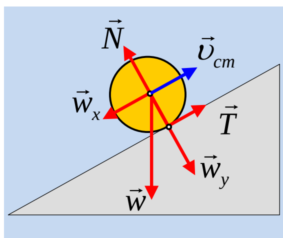
i) Έστω ότι το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο. Τότε κατά την άνοδο της σφαίρας, δεν ασκείται καμιά ροπή, οπότε η γωνιακή της ταχύτητα παραμένει σταθερή. Οπότε εφαρμόζοντας την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (επίπεδο μηδενικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας της σφαίρας στο οριζόντιο επίπεδο) και αν y η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου μάζας μεταξύ οριζοντίου επιπέδου και ανώτερης θέσης, παίρνουμε:

$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2+0=\frac{1}{2}I\omega^2+mgy\rightarrow$$

$$y=\frac{\upsilon_{cm}^2}{2g}=\frac{4^2}{2\cdot 10}m=0{,}8m$$

Αλλά έχουμε δεδομένο ότι το ύψος είναι μεγαλύτερο (1m) συνεπώς ασκείται τριβή στην σφαίρα κατά την προς τα πάνω κίνησή της.



ii) Θεωρώντας τη σύνθετη κίνηση της σφαίρας σαν μια μεταφορά και περιστροφή έχουμε (δουλεύουμε με τα μέτρα των μεγεθών):

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=m\alpha_{cm}\rightarrow mg\cdot ημθ-T=m\alpha_{cm}$ (1)

Αλλά $\upsilon=\upsilon_{ocm}-\alpha_{cm}\cdot t$ (2) και $x=\upsilon_{ocm}.t-½\,\alpha_{cm}t^2$ (3)

Τη στιγμή που σταματά η άνοδος υ=0 και $\left(t_{ολ}=\frac{\upsilon_{ocm}}{a_{cm}}\right)$ και με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$x_{ολ}=\frac{\upsilon_{ocm}^2}{2a_{cm}}\to$$

$$a_{cm}=\frac{\upsilon_{ocm}^2}{2x_{ολ}}=\frac{\upsilon_{ocm}^2}{2h}ημθ=\frac{4^2}{2\cdot 1}\frac{1}{2}m/s^2=4m/s^2$$

Αλλά τότε: $T=mgημθ - ma_{cm}=1\cdot 10\cdot 0{,}5N-1\cdot 4N=1N$.

Στροφική κίνηση: $Στ=I\cdot a_{γων}\to T\cdot R=\frac{2}{5}mR^2a_{γων}\to a_{γων}=\frac{5}{2}\frac{T}{mR}=\frac{5\cdot 1}{2\cdot 1\cdot R}=\frac{5}{2R}$

Αλλά τότε η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας είναι:

$$\omega=\omega_o-a_{γων}t=\frac{\upsilon_{ocm}}{R}-\frac{5}{2R}t\to$$

$$\omega=\frac{\upsilon_{ocm}}{R}-\frac{5}{2R}\frac{\upsilon_{ocm}}{a_{cm}}=\left(\frac{4}{R}-\frac{5\cdot 4}{2R\cdot 4}\right)=\left(\frac{4}{R}-\frac{5}{2R}\right)=\frac{3}{2R}\quad \text{(S.I.)}$$

Συνεπώς τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας, η σφαίρα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω έχοντας κινητική ενέργεια:

$$K_{τελ}=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\cdot\left(\frac{3}{2R}\right)^2=\frac{9}{20}J=0{,}45J$$

iii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την σύνθετη κίνηση της σφαίρας στο κεκλιμένο επίπεδο:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w+W_N+W_T\to$$

$$K_{τελ}-\frac{1}{2}m\upsilon_{ocm}^2-\frac{1}{2}I\omega_o^2=-mgh+0+W_T\to$$

$$W_T=K_{τελ}-\frac{1}{2}m\upsilon_{ocm}^2-\frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{\upsilon_{ocm}^2}{R^2}\right)+mgh=K_{τελ}-\frac{7}{10}m\upsilon_{ocm}^2+mgh$$

$$W_T=0{,}45J-\frac{7}{10}1\cdot 4^2J+1\cdot 10\cdot 1J=-0{,}75J$$

Σχόλια:

1) Στο ii) ερώτημα θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τη δυναμική μελέτη, αν χρησιμοποιούσαμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη μεταφορική κίνηση:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w+W_N+W_T\to$$

$$0-\frac{1}{2}m\upsilon_{ocm}^2=-mgh+0+T\cdot\frac{h}{ημθ}\to T=1N$$

2) Η αρχική μηχανική ενέργεια της σφαίρας είναι ίση με την κινητική της ενέργεια (U=0):

$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{7}{10} m\upsilon_{ocm}^2 = 11{,}2J$$

ενώ στην ανώτερη θέση έχει μηχανική ενέργεια

$$E_{M/\tau\varepsilon\lambda}=K+U=0{,}45J+mgh=10{,}45J,$$

αλλά τότε η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, η οποία μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής ολίσθησης θα είναι ίση:

$$Q=E_{\mu\eta\chi/\alpha\rho\chi}-E_{\mu\eta\chi/\tau\varepsilon\lambda}=11{,}2J-10{,}45J=0{,}75J.$$

dmargaris@sch.gr