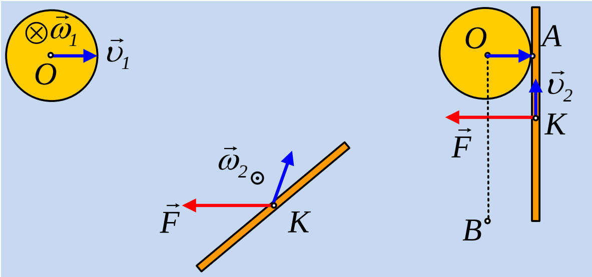
Η στροφορμή σε ένα σύστημα σωμάτων.



Κάτοψη.

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται, αφενός ένας δίσκος μάζας M=10kg και ακτίνας R=0,4m ο οποίος έχει ταχύτητα υ_1=1m/s και γωνιακή ταχύτητα ω_1=1rad/s, κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, αφετέρου μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=2m μάζας m=3kg, η οποία δέχεται μια σταθερή οριζόντια δύναμη F=10N στη διεύθυνση της ταχύτητας του δίσκου. Σε μια στιγμή τα σώματα συγκρούονται ελαστικά. Τη στιγμή της κρούσης (δεύτερο σχήμα) η ράβδος έχει ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}=\upsilon_2$=1m/s κάθετη στην ταχύτητα υ_1 και γωνιακή ταχύτητα ω_2=2rad/s, κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, ενώ και το σημείο σύγκρουσης Α απέχει 0,5m από το μέσον Κ της ράβδου.

Α) Ποια η συνολική στροφορμή του συστήματος ελάχιστα πριν την κρούση;

Β) Για τη στιγμή ελάχιστα πριν την κρούση και για το σύστημα των δύο σωμάτων να βρεθούν:

i) Η συνολική στροφορμή ως προς το κέντρο Ο του δίσκου.

ii) Η συνολική στροφορμή ως προς το μέσον Κ της ράβδου.

iii) Η συνολική στροφορμή ως προς το σημείο κρούσης Α.

iv) Η συνολική στροφορμή ως προς το σημείο Β το οποίο απέχει κατά 1,5m από το κέντρο του δίσκου και κατά 0,4m από τη ράβδο.

v) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς το σημείο Β.

Γ) Αν στη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων ενώ η ώθηση της δύναμης F θεωρηθεί αμελητέα, να υπολογιστούν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας και οι γωνιακές ταχύτητες των δύο στερεών, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας ως προς κατακόρυφους άξονας που περνάνε από το κέντρο μάζας κάθε στερεού $I_1=\frac{1}{2}MR^2$ και $I_2=\frac{1}{12}M\ell^2$.

Απάντηση:

Α) Η ερώτηση αυτή **δεν επιδέχεται απάντηση**. Δεν υπάρχει στροφορμή έτσι γενικώς, αλλά στροφορμή ως προς ένα σημείο ή κατά (ως προς) έναν άξονα.

Β) Η συνολική στροφορμή υπολογιζόμενη για το σύστημα **ως προς το ίδιο σημείο**, θα προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των επιμέρους σωμάτων, ως προς το σημείο αυτό.

$$\vec{L}_{o\lambda}=\vec{L}_1+\vec{L}_2$$

Έτσι θεωρώντας ως θετική την κατεύθυνση την κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τον αναγνώστη:

i) Ως προς το κέντρο Ο του δίσκου θα έχουμε:

$$L_{ολ} = -I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + m_2\upsilon_2 d$$

$$L_{ολ/O} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 + m\upsilon_2 R \rightarrow$$

$$L_{ολ/O} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0{,}4\right)kg\cdot m/s = 2{,}4kg\cdot m^2/s$$

ii) Ως προς το μέσον Κ της ράβδου:

$$L_{ολ/K} = -I_1\omega_1 + m_1\upsilon_1 d + I_2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/K} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 - M\upsilon_1(AK) + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/K} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 - 10\cdot 1\cdot 0{,}5 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2\right)kg\cdot m/s = -3{,}8kg\cdot m^2/s.$$

iii) Ως προς το σημείο κρούσης Α:

$$L_{ολ/A} = -I_1\omega_1 + I_2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/A} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/A} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2\right)kg\cdot m/s = 1{,}2kg\cdot m^2/s.$$

iv) Ως προς το σημείο Β:

$$L_{ολ/B} = -I_1\omega_1 + m_1\upsilon_1 d_1 + I_2\omega_2 + m\upsilon_2 d_2 \rightarrow$$

$$L_{ολ/B} = -\frac{1}{2}MR^2\omega_1 - M\upsilon_1(OB) + \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 + m\upsilon_2 R \rightarrow$$

$$L_{ολ/B} = \left(-\frac{1}{2}10\cdot 0{,}4^2\cdot 1 - 10\cdot 1\cdot 1{,}5 + \frac{1}{12}3\cdot 2^2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0{,}4\right)kg\cdot m/s = -12{,}6kg\cdot m^2/s.$$

v) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος, ως προς ένα σημείο, είναι ίσος με την αντίστοιχη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το ίδιο σημείο. Αλλά για κάθε σώμα στην κατακόρυφη διεύθυνση η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων w και Ν (και ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο) είναι μηδενική, οπότε:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = Fd = F(OB - AK) = 10\cdot 1kgm^2/s^2 = 10kgm^2/s^2$$

Ας δούμε τι ακριβώς υπολογίζουμε.

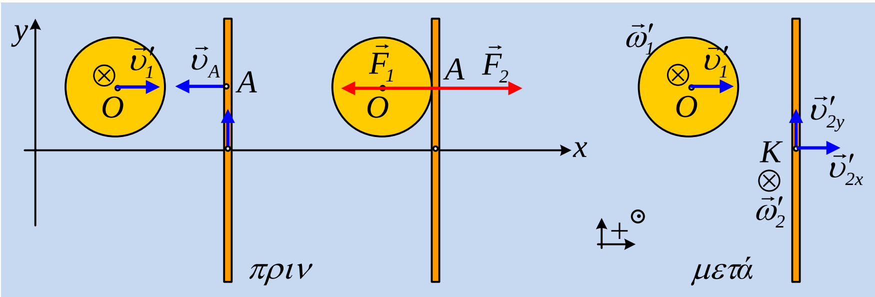
Στον δίσκο δεν ασκείται καμιά δύναμη, οπότε δεν μεταβάλλεται ούτε η ταχύτητα του κέντρου μάζα του, ούτε η γωνιακή του ταχύτητα. Αλλά ούτε στην ράβδο ασκείται ροπή ως προς το κέντρο μάζας της, συνεπώς η γωνιακή της ταχύτητα παραμένει σταθερή. Όμως η ασκούμενη δύναμη στο μέσον της προκαλεί επιτάχυνση στην κατεύθυνση της δύναμης σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Νεύτωνα.

Η κίνηση του κέντρου μάζας, μπορεί να μελετηθεί σε δυο άξονες. Έναν στη διεύθυνση της δύναμης, ας τον πούμε άξονα x και ένα σε κάθετη διεύθυνση, έστω άξονας y. Αλλά τότε η κίνηση στον άξονα y είναι ευθύγραμμη ομαλή και η στροφορμή ως προς το σημείο Β, η οποία οφείλεται στην ταχύτητα $υ_y$ θα παραμένει σταθερή. Αλλά η στροφορμή ως προς Β η οποία οφείλεται στην κίνηση κατά τον άξονα x είναι:

$$L_{B/x}=mυ_x \cdot d=mυ_x \cdot \frac{\ell}{2} \rightarrow$$

$$\frac{dL_x}{dt}=m\frac{dυ_x}{dt}\frac{\ell}{2}=ma_x\frac{\ell}{2}=F\cdot\frac{\ell}{2}=10kgm^2/s^2.$$

Γ) Στο παρακάτω σχήμα, αριστερά έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες στην διεύθυνση x, όπου το σημείο Α της ράβδου έχει γραμμική ταχύτητα $υ_A= ω_2 \cdot (AK)$ =1m/s, ενώ δεξιά οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα στη διάρκεια της κρούσεις (κρουστικές δυνάμεις που αναπτύσσονται εξαιτίας της κρούσης) και οι οποίες θα μεταβάλλουν την κίνησή τους στην διεύθυνση x, ενώ η ροπή της $\mathbf{F_2}$ ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου, θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή και της γωνιακής της ταχύτητας.



i) Από τη στιγμή που η ώθηση της δύναμης F, στη διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα, η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, οπότε παίρνουμε:

$$\vec{P}_{πριν}=\vec{P}_{μετά} \Rightarrow \begin{cases} P_{x/πριν}=P_{x/μετά} \rightarrow Mυ_1+0=Mυ'_{1x}+mυ'_{2x} \\ P_{y/πριν}=P_{y/μετά} \rightarrow 0+mυ_2=Mυ'_{1y}+mυ'_{2y} \quad (2) \end{cases}$$

Αλλά με βάση τις δυνάμεις που αναφέραμε προηγούμενα, αλλαγή θα έχουμε στις ταχύτητες στη διεύθυνση των δυνάμεων (διεύθυνση x), συνεπώς $υ_{1y}{'}=0$ και $υ_{2y}{'}=υ_2$.

ii) Εφαρμόζουμε τώρα την διατήρηση της στροφορμής ως προς κάποιο σημείο. Το παραπάνω ερώτημα νομίζω μας απέδειξε ότι μπορούμε να το κάνουμε, ως προς οποιοδήποτε σημείο θέλουμε. Ας επιλέξουμε το σημείο σύγκρουσης Α, για να έχουμε πιο λιτές εξισώσεις λοιπόν.

$$\vec{L}_{A/πριν}=\vec{L}_{A/μετά} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}MR^2ω_1+\frac{1}{12}m\ell^2ω_2=-\frac{1}{2}MR^2ω'_1-\frac{1}{12}m\ell^2ω'_2+mυ'_{2x}(AK)$$

Όπου όμως ο δίσκος, δεν δέχτηκε κάποια ροπή στη διάρκεια της κρούσης, οπότε δεν άλλαξε και η γωνιακή του ταχύτητα, ενώ υ_{2x}' είναι η συνιστώσα ταχύτητας του κέντρου μάζας της ράβδου στην διεύθυνση x, μετά την κρούση. Έτσι η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2 = -\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2' + m\upsilon_{2x}'(AK) \quad (3)$$

iii) Αλλά αφού η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση θα είναι ίδια:

$$K_1+K_2=K_1'+K_2' \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2\right)+\left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2\right)=\left(\frac{1}{2}M\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1'^2\right)+\left(\frac{1}{2}m\upsilon_2'^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2'^2\right)$$

Λαμβάνοντας δε υπόψη μας ότι $\upsilon_{1y}'=0$, $\upsilon_{2y}'=\upsilon_2$ και $\omega_1'=\omega_1$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\left(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2^2\right)=\frac{1}{2}M\upsilon_{1x}'^2+\left(\frac{1}{2}m\left(\upsilon_{2x}'^2+\upsilon_{2y}'^2\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2'^2\right)\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2^2=\frac{1}{2}M\upsilon_{1x}'^2+\left(\frac{1}{2}m\upsilon_{2x}'^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_2'^2\right) \quad (4)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) και (4) και με την προϋπόθεση ότι δεν κάναμε λάθος!!! στις πράξεις, βρίσκουμε τα μέτρα των μεγεθών (οι κατευθύνσεις είναι σημειωμένες στο προηγούμενο σχήμα):

$$\upsilon_1' \approx 0{,}4m/s,\ \omega_1' = 1rad/s$$

$$\upsilon_{2x}' \approx 1{,}9m/s,\ \upsilon_{2y}' = 1m/s,\ \upsilon_2' \approx 2{,}2m/s,\ \omega_2' \approx 0{,}9rad/s.$$

dmargaris@sch.gr