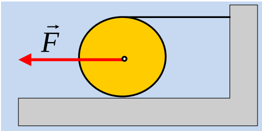
Και αν ο τροχός ολισθαίνει….



Ο τροχός του σχήματος, μάζας 20kg και ακτίνας R=0,4m, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει τριβή, με συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0{,}1$. Γύρω του έχουμε τυλίξει ένα αβαρές με μη εκτατό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο σε τέτοια θέση, ώστε το νήμα να είναι οριζόντιο.

Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο κέντρο του τροχού μια οριζόντια δύναμη **F**, το μέτρο της οποίας αυξάνεται σε συνάρτηση με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση F=20+2t (μονάδες στο S.I.), όπως στο σχήμα.

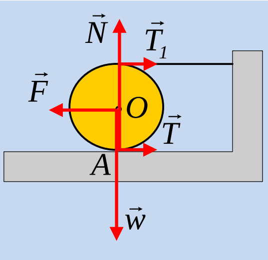
i) Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή ο τροχός θα κινηθεί.

ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή t_2 που η ταχύτητα του κέντρου μάζας πάρει τιμή $\upsilon_{cm}=10/3$ m/s.

iii) Για τη στιγμή t_2 να βρεθεί η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στον τροχό, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του που περνά από το Ο $I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Μόλις ασκηθεί στον τροχό η δύναμη F, τείνει να κινηθεί ο τροχός προς τα αριστερά, οπότε θα ασκηθεί πάνω του και η τάση του νήματος T_1, η οποία τείνει να περιστρέψει τον τροχό σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Αλλά τότε το σημείο επαφής του τροχού με το έδαφος (σημείο Α), τείνει να αποκτήσει ταχύτητα με φορά προς τα αριστερά και θα εμφανιστεί τριβή με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα. Για όσο χρόνο ο τροχός ισορροπεί θα ισχύουν:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=Mg=200N$$

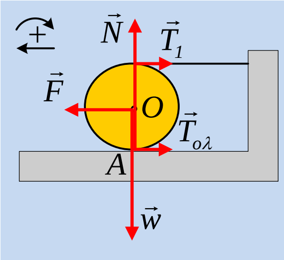
$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F=T_1+T_s \quad (1)$$

$$\Sigma\tau_O=0 \rightarrow T_s\cdot R-T_1\cdot R=0 \rightarrow T_s=T_1 \rightarrow$$

$$\text{Από } (1)\ T_1=T_s=\tfrac{1}{2}F=10+t \quad (S.I.).$$

Αλλά ο τροχός θα αρχίσει να κινείται όταν η στατική τριβή πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή της, γίνει δηλαδή ίση με την οριακή τριβή, δηλαδή όταν:

$$T_s=T_{op}=\mu_s\cdot N \rightarrow 10+t_1=0{,}1\cdot 200 \rightarrow t_1=10s.$$

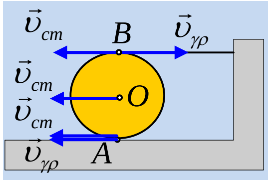


ii) Από τη στιγμή που ο τροχός θα κινηθεί προς τα αριστερά, το νήμα θα αρχίσει να ξετυλίγεται, οπότε θα αρχίσει να στρέφεται με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και από το 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F-T_{ο\lambda}-T_1=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F-\mu\cdot N-T_1=M\cdot\alpha_{cm} \quad (2)$$

$$\Sigma\tau_O=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1\cdot R-\mu N\cdot R=\tfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T_1\text{-}\mu N = ½\, MR\cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$



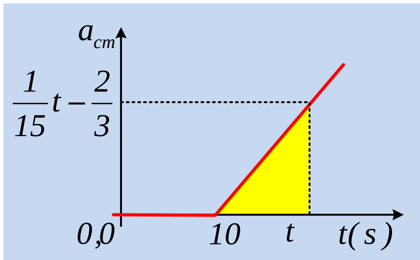
Αλλά αν εστιάσουμε την προσοχή μας στο σημείο Β, όπου το νήμα έρχεται σε επαφή με τον κύλινδρο, έχει μηδενική ταχύτητα, αφού το νήμα δεν κινείται (είναι δεμένο σε τοίχο). Αλλά το σημείο Β, ως σημείο του τροχού έχει ταχύτητα προς τα αριστερά ίση μη υ_{cm} και μια γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$, εξαιτίας της κυκλικής κίνησής του. Οπότε $\upsilon_{cm}=\omega\cdot R$ και με παραγώγιση παίρνουμε:

$$a_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = a_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (4)$$

Οπότε λύνοντας το σύστημα των (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$F\text{-}\mu\cdot N\text{-}T_1 + T_1\text{-}\mu N = M\cdot\alpha_{cm} + ½\, M\alpha_{cm} \rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{F-2\mu N}{{}^3\!/_2 M} = \frac{20+2t-2\cdot 0{,}1\cdot 200}{1{,}5\cdot 20} = \frac{2t-20}{30} = \frac{1}{15}t-\frac{2}{3} \quad \text{(S.I) με } t \geq 10\text{s}$$



Για να βρούμε ποια χρονική στιγμή ο τροχός θα αποκτήσει ταχύτητα υ_{cm}=10/3 m/s, κάνουμε τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας σε συνάρτηση με το χρόνο. Το εμβαδόν του τριγώνου με κίτρινο χρώμα, στο διπλανό σχήμα είναι αριθμητικά ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας του τροχού, όπου $\Delta\upsilon_{cm}=\upsilon_{cm}-0=\upsilon_{cm}$:

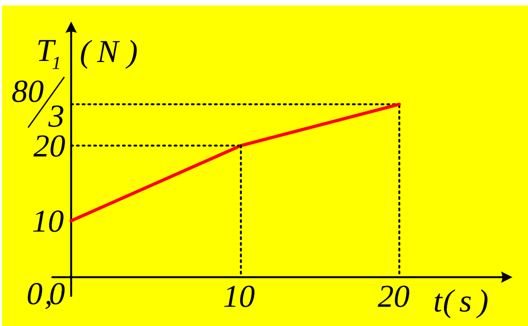
$$\Delta\upsilon_{cm} = \frac{1}{2}(t-10)\cdot\left(\frac{t}{15}-\frac{2}{3}\right) \rightarrow$$

$$\frac{10}{3} = \frac{1}{2}(t-10)\cdot\left(\frac{t}{15}-\frac{2}{3}\right) \rightarrow t^2\text{-}20t=0 \rightarrow t=0 \text{ (απορ) οπότε } t_2=20s.$$

Αλλά αντικαθιστώντας στην (3) την παραπάνω τιμή παίρνουμε:

$$T_1\text{-}\mu N = ½\, M\alpha_{cm} \rightarrow T_1 = 20+\frac{1}{2}20\left(\frac{1}{15}t-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}t+\frac{40}{3} \quad \text{(S.I.)}$$

Οπότε η ζητούμενη γραφική παράσταση, της τάσης του νήματος, σε συνάρτηση με το χρόνο, είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



iii) Τη χρονική στιγμή t_2 η δύναμη F έχει μέτρο F=(20+2·20)N=60N και ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ενέργεια στον τροχό (η ισχύς της δύναμης) είναι ίσος:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = F \cdot \upsilon_{cm} = 60N \cdot \frac{10}{3} m/s = 200J/s$$

Η αντίστοιχη ισχύς της τάσης του νήματος T_1 θα είναι:

$$P_{T_1} = \frac{dW_{T_1}}{dt} = T_1 \cdot \upsilon_B = 0$$

Ενώ για την τριβή ολίσθησης:

$$P_{T o\lambda} = \frac{dW_{T_{o\lambda}}}{dt} = -\mu N \cdot \upsilon_A = -2\mu N \upsilon_{cm} = -2 \cdot 0{,}1 \cdot 200 \cdot \frac{10}{3} J/s = -\frac{400}{3} J/s$$

Αφού το σημείο εφαρμογής της τριβής, το σημείο Α έχει ταχύτητα $\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = 2\upsilon_{cm}$.

Αλλά τότε ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, θα προκύψει από το Θ.Μ.Κ.Ε. για τον τροχό, όπου αφού $\Delta K = W_F + W_{T1} + W_{\tau o\lambda}$, θα πάρουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_{T_1}}{dt} + \frac{dW_{T_{o\lambda}}}{dt} = 200J/s + 0 - \frac{400}{3} J/s = \frac{200}{3} J/s$$

dmargaris@sch.gr