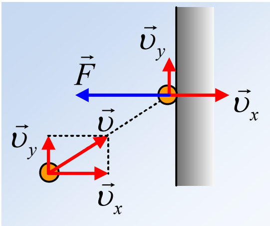
Και τα στερεά συγκρούονται……

Εξετάζοντας την ελαστική κρούση υλικών σημείων, ουσιαστικά εξετάζουμε την κρούση μεταξύ δύο στερεών σωμάτων, δύο μικρών σφαιρών, τα οποία εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που τα σώματα μπορούν και να περιστρέφονται; Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι διαστάσεις των σωμάτων, αλλά και ο συγκεκριμένος τρόπος κρούσης ή για να το πούμε διαφορετικά η Γεωμετρία τη στιγμή τα κρούσης.

Πριν όμως εξετάσουμε μερικές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, αξίζει να τονιστεί ότι όταν μιλάμε για ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων, ουσιαστικά δεχόμαστε ότι δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής στη διάρκεια της κρούσης. Έτσι για παράδειγμα, στην περίπτωση που εξετάζει το σχολικό μας βιβλίο, που μια μικρή σφαίρα συγκρούεται με τοίχο, όπως στο σχήμα, η δύναμη που δέχεται από τον τοίχο, είναι κάθετη σε αυτόν, μεταβάλλοντας την συνιστώσα $υ_x$ της ταχύτητας, αφήνοντας όμως ανεπηρέαστη την συνιστώσα $υ_y$, την παράλληλη στην επιφάνεια επαφής.



Ας εξετάσουμε τώρα βήμα-βήμα μερικές περιπτώσεις ελαστικής κρούσης επίπεδων στερεών, τα οποία συγκρούονται εκτός πεδίου βαρύτητας, ώστε να μην εμπλέκονται τα βάρη.

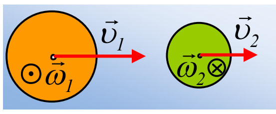
1) «Κεντρική» ελαστική κρούση.

Με τον όρο «κεντρική» ας ονομάσουμε την ελαστική εκείνη κρούση, που ανεξάρτητα από άλλα χαρακτηριστικά της, αναπτύσσονται δυνάμεις κρούσης, οι οποίες διέρχονται από τα κέντρα μάζας των στερεών. Ας προσέξουμε ότι δεν μιλάμε για ταχύτητες, αλλά μόνο για τις δυνάμεις που πρόκειται να εμφανιστούν στη διάρκεια της κρούσης.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

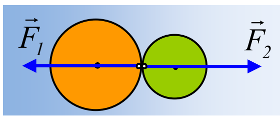
Παράδειγμα 1ο:

Δυο επίπεδα στερεά κυκλικής διατομής συγκρούονται κεντρικά, όπως στο σχήμα. Να βρεθούν οι ταχύτητες και οι γωνιακές ταχύτητες μετά την κρούση.



Απάντηση:

Στη διάρκεια της κρούσης στα δυο στερεά ασκούνται οι δυνάμεις F_1 και F_2, οι φορείς των οποίων περνάνε από τα κέντρα μάζας των δύο στερεών, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε δεν ασκείται καμιά ροπή στα στερεά που να μεταβάλλει την γωνιακή τους ταχύτητα.



Από την διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$m_1υ_1 + m_2υ_2 = m_1υ'_1 + m_2υ'_2 \quad (1)$$

Και από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας, έχουμε:

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_2}\omega_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_2}\omega_2^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε:

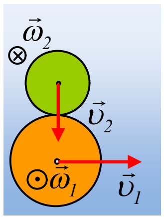
$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2$$

Ενώ $\omega_1' = \omega_1$ και $\omega_2' = \omega_2$

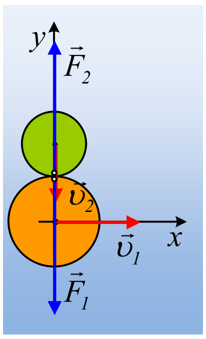
Βλέπουμε ότι η παραπάνω κρούση, δεν διαφέρει σε τίποτα από τη γνωστή μας κεντρική ελαστική κρούση μεταξύ δύο σημειακών μαζών, με μόνη διαφορά, ότι τα σώματα περιστρέφονται, διατηρώντας όμως σταθερή τη γωνιακή τους ταχύτητα.

Παράδειγμα 2ο:

Δυο σφαίρες συγκρούονται ελαστικά όπως στο διπλανό σχήμα. Να βρεθεί πώς θα κινηθεί καθεμιά, μετά την κρούση.



Απάντηση:



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στις σφαίρες στη διάρκεια της κρούσης, όπου και εδώ διέρχονται από τα κέντρα μάζας και δεν θα μεταβάλλουν τις γωνιακές ταχύτητές τους.

Με βάση τις δυνάμεις αυτές προκύπτει ότι η δεύτερη σφαίρα δεν πρόκειται να αποκτήσει ταχύτητα στη διεύθυνση της υ_1 (κατά τον άξονα x).

Ξανά από την διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \Rightarrow \begin{cases} P_{x/πριν} = P_{x/μετά} \rightarrow m_1\upsilon_1 + m_2 0 = m_1\upsilon_{1\chi}' + m_2 0 \quad (3) \\ P_{y/πριν} = P_{y/μετά} \rightarrow m_1 0 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_{1y}' + m_2\upsilon_{2y}' \quad (4) \end{cases}$$

Και από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας, έχουμε:

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_2}\omega_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_2}\omega_2^2$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}'^2\xrightarrow{(3)}$$

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}'^2\quad(5)$$

Από (4) και (5) παίρνουμε:

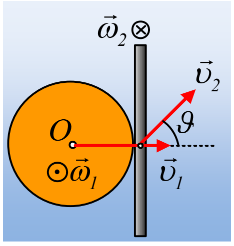
$$\upsilon_{1y}'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1y}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2y}=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2 \quad \text{και}$$

$$\upsilon_{2y}'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1y}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{2y}=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2$$

Ενώ $\upsilon_{1x}'=\upsilon_1, \upsilon_{2x}'=0$, $\omega_1'=\omega_1$ και $\omega_2'=\omega_2$

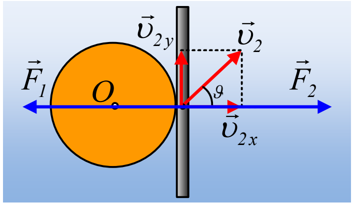
Παράδειγμα 3ο:

Μια σφαίρα και μια ομογενής ράβδος συγκρούονται ελαστικά, όπως στο σχήμα, όπου η σφαίρα κτυπά τη ράβδο στο μέσον της, ενώ η ταχύτητα της ράβδου σχηματίζει γωνία θ με τη διεύθυνση κίνησης του κέντρου Ο της σφαίρας.
Να βρεθεί πώς θα κινηθεί κάθε στερεό μετά την κρούση.



Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στα στερεά στη διάρκεια της κρούσης, όπου επίσης διέρχονται από τα κέντρα μάζας και δεν θα μεταβάλλουν τις γωνιακές τους ταχύτητες. Εξάλλου αν αναλύσουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου σε δυο συνιστώσες, μόνο η υ_{2x} θα «συνεισφέρει» στην κρούση, αφού η συνιστώσα υ_{2y} δεν πρόκειται να μεταβληθεί, όπως επίσης δεν πρόκειται να κινηθεί η σφαίρα στην διεύθυνση y.



Ξανά από την διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$\vec{P}_{πριν}=\vec{P}_{μετά}\Rightarrow\begin{cases}P_{x/πριν}=P_{x/μετά}\rightarrow m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_{2x}=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_{2x}' \quad (5)\\ P_{y/πριν}=P_{y/μετά}\rightarrow m_1 0+m_2\upsilon_{2y}=m_1 0+m_2\upsilon_{2y}'\rightarrow\upsilon_{2y}'=\upsilon_{2y}\ (6)\end{cases}$$

Και από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας, έχουμε:

$$K_1+K_2=K_1'+K_2'\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\cancel{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2}+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\cancel{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\cancel{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2}+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2+\cancel{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}'^2\xrightarrow{(6)}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2 \quad (7)$$

Από (5) και (7) παίρνουμε:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2x}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και}$$

$$\upsilon_{2x}'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{2x}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta$$

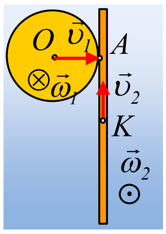
Ενώ $\upsilon_{1y}'=0$, $\upsilon_{2y}'=\upsilon_2\eta\mu\theta$, $\omega_1'=\omega_1$ και $\omega_2'=\omega_2$

2) Μη «κεντρική» ελαστική κρούση.

Ας εντάξουμε στην κατηγορία αυτή όλες τις άλλες ελαστικές κρούσεις, (στις οποίες οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης στη διάρκεια της κρούσης δεν περνάνε από τα κέντρα μάζας) μεταξύ δύο επίπεδων στερεών σωμάτων και ας εξετάσουμε επίσης κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 4ο:

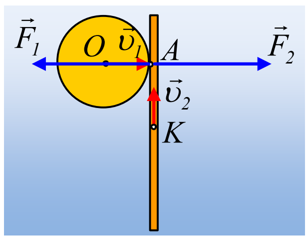
Ένας κυκλικός δίσκος συγκρούεται με μια ομογενή ράβδο, όπως στο σχήμα, όπου το σημείο επαφής A απέχει απόσταση d από το κέντρο της ράβδου K. Πώς θα κινηθούν τα σώματα μετά την ελαστική τους κρούση;



πριν

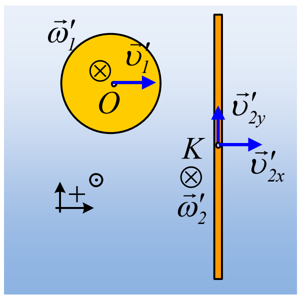
Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στα στερεά στη διάρκεια της κρούσης. Αλλά η δύναμη F_1 δεν έχει ροπή ως προς το κέντρο του δίσκου, με αποτέλεσμα να μην μεταβληθεί η γωνιακή του ταχύτητα. Αντίθετα η δύναμη F_2, παρουσιάζει ροπή ως προς το κέντρο K της ράβδου, μέτρου $\tau=F_2d$ με αποτέλεσμα να μεταβληθεί η γωνιακή της ταχύτητα. Εξάλλου, με βάση τις δυνάμεις αυτές, ο δίσκος δεν πρόκειται να αποκτήσει ταχύτητα στην διεύθυνση της ταχύτητας υ_2 (άξονας y), ενώ δεν πρόκειται να μεταβληθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου υ_2 στην ίδια διεύθυνση.



Η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, οπότε παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} P_{x/\pi\rho\iota\nu}=P_{x/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow m_1\upsilon_1+0=m_1\upsilon_{1x}'+m_2\upsilon_{2x}' \\ P_{y/\pi\rho\iota\nu}=P_{y/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow 0+m_2\upsilon_2=m_1\upsilon_{1y}'+m_2\upsilon_{2y}' \end{cases}$$



μετά

Αλλά με βάση τις δυνάμεις που αναφέραμε προηγούμενα, αλλαγή θα έχουμε στις ταχύτητες στη διεύθυνση των δυνάμεων (διεύθυνση x), συνεπώς $\upsilon_{1y}'=0$ και $\upsilon_{2y}'=\upsilon_2$, οπότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$m_1\upsilon_1+0=m_1\upsilon'_{1x}+m_2\upsilon'_{2x} \quad (8)$$

$$\upsilon_{2y}'=\upsilon_2$$

Εφαρμόζουμε τώρα την διατήρηση της στροφορμής ως το σημείο σύγκρουσης Α:

$$\vec{L}_{A/\pi\rho\iota\nu}=\vec{L}_{A/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}\rightarrow$$

$$-I_1\omega_1+I_2\omega_2=-I_1\omega'_1-I_2\omega'_2+m\upsilon'_{2x}d\rightarrow$$

$$I_2\omega_2=-I_2\omega'_2+m\upsilon'_{2x}d \quad (9)$$

Αλλά αφού η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση θα είναι ίδια:

$$K_1+K_2=K_1'+K_2'\rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2\right)+\left(\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2\right)=\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1'^2\right)+\left(\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2'^2\right)$$

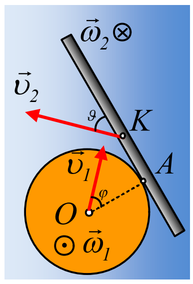
Λαμβάνοντας δε υπόψη μας ότι $\upsilon_{1y}'=0$, $\upsilon_{2y}'=\upsilon_2$ και $\omega_1'=\omega_1$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\left(\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2\right)=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2+\left(\frac{1}{2}m_2\left(\upsilon_{2x}'^2+\upsilon_{2y}'^2\right)+\frac{1}{2}I_2\omega_2'^2\right)\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2'^2 \quad (10)$$

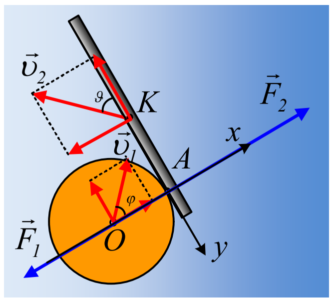
Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (6), (7) και (8) βρίσκουμε τους 3 αγνώστους μας, $\upsilon'_{1x},\upsilon'_{2x}$ και ω'_2.

Παράδειγμα 5ο:



Ο παραπάνω δίσκος συγκρούεται τώρα με την ράβδο, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου το σημείο επαφής Α απέχει κατά d από το μέσον Κ της ράβδου. Αν η κρούση είναι ελαστική να βρεθούν πώς θα κινηθούν τα δυο στερεά μετά την κρούση.

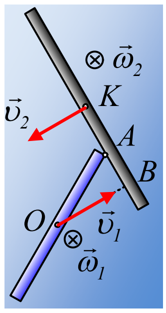
Απάντηση:



Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις λόγω κρούσης και με βάση όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω, το αποτέλεσμά τους είναι να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, αλλά όχι του δίσκου. Εξάλλου αν πάρουμε τους άξονες x και y, όπως στο σχήμα και αναλύσουμε τις ταχύτητες πάνω στους άξονες, προκύπτει ότι λόγω κρούσης θα μεταβληθούν οι συνιστώσες υ_{1x} και υ_{2x}, όχι όμως οι συνιστώσες υ_{1y} και υ_{2y}.

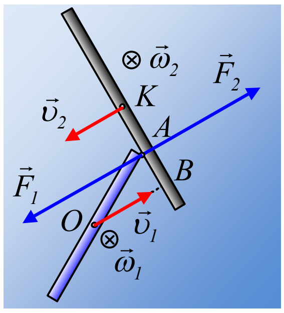
Η υπόλοιπη ανάλυση είναι ακριβώς, όπως στο 4ο παράδειγμα με τις ίδιες αρχές και ουσιαστικά τις ίδιες εξισώσεις.

Παράδειγμα 6°:

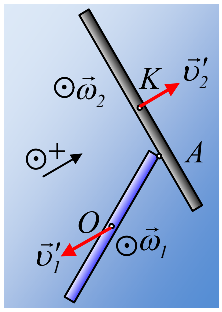


Έστω τώρα ότι δυο ομογενείς ράβδοι που κινούνται όπως στο παρακάτω σχήμα συγκρούονται, όπου το σημείο επαφής Α απέχει κατά $x=\frac{1}{4}\ell$ από το μέσον Κ της δεύτερης ράβδου, όπου ℓ το μήκος της. Αν η κρούση είναι ελαστική να βρεθούν πώς θα κινηθούν οι δυο ράβδοι μετά την κρούση. (Για ευκολότερες εξισώσεις, χωρίς να χάνουμε κάτι από φυσική, έστω ότι οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο ράβδων είναι παράλληλες και κάθετες στην δεύτερη εξ αυτών. Σε αντίθετη περίπτωση απλά θα αναλύαμε τις ταχύτητες σε συνιστώσες και θα δουλεύαμε σε άξονες, όπως σε προηγούμενα παραδείγματα). Η απόσταση ΚΒ θεωρείται γνωστή.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης που ασκούνται στις ράβδους στη διάρκεια της κρούσης, κάθετες στην επιφάνεια επαφής. Προφανώς θα μεταβάλλουν τις δυο ταχύτητες, αλλά χωρίς να αλλάξουν τις κατευθύνσεις τους. Εξάλλου οι ροπή καθεμιάς ως προς το κέντρο μάζας της αντίστοιχης ράβδου, θα μεταβάλλει και την γωνιακή της ταχύτητα.



Έστω ότι μετά την κρούση η κατάσταση είναι όπως στο δεύτερο σχήμα.

Από τη διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2 \quad (11)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την διατήρηση της στροφορμής ως προς το μέσον Κ της δεύτερης ράβδου:

$$\vec{L}_{K/\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{K/\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \rightarrow$$

$$m_1\upsilon_1(KB) - I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = -m_1\upsilon'_1(KB) + I_1\omega'_1 + I_2\omega'_2 \quad (12)$$

Ας επικεντρωθούμε τώρα στην δεύτερη ράβδο.

Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα, για τη μεταφορική της κίνηση, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_2 \rightarrow P_{2/\tau\varepsilon\lambda} - P_{2/\alpha\rho\chi} = \int F_2 dt \rightarrow$$

$$m_2\upsilon'_2 - (-m_2\upsilon_2) = \int F_2 dt \quad (13)$$

Εξάλλου από τον γενικευμένο νόμο για την περιστροφική κίνηση της ράβδου, ως προς το κέντρο μάζας Κ, παίρνουμε:

$$\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau \rightarrow L_{2/\tau\varepsilon\lambda} - L_{2/\alpha\rho\chi} = \int F_2 x dt = x\int F_2 dt \rightarrow$$

$$I_2\omega_2' - (-I_2\omega_2) = x\int F_2 dt \quad (14)$$

Διαιρώντας τις (11) και (12) κατά μέλη θα πάρουμε:

$$\frac{m_2\upsilon_2' + m_2\upsilon_2 =}{I_2\omega_2' + I_2\omega_2 =} = \frac{\int F_2 dt}{x\int F_2 dt} = \frac{1}{x} = \frac{4}{\ell} \quad (15)$$

Τέλος από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας παίρνουμε:

$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2\right) = \left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1'^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2'^2\right) \quad (16)$$

Οι εξισώσεις (11), (12), (15) και (16) αποτελούν το σύστημα, η λύση του οποίου παρέχει τις τιμές υ_1', υ_2', ω_1' και ω_2'.

Σημείωση:

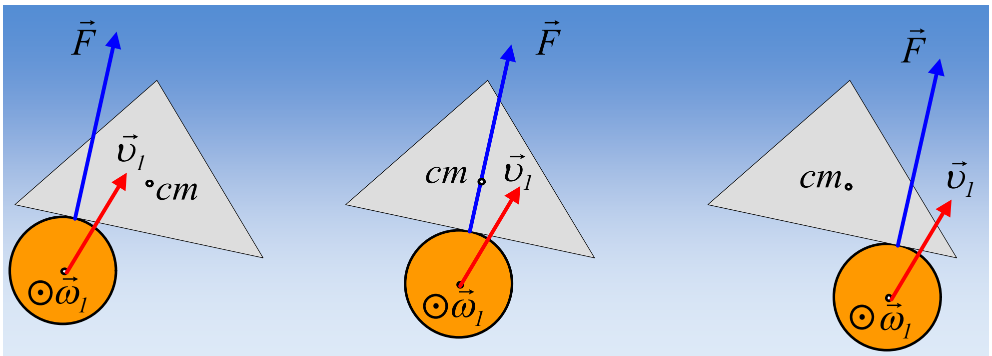
Η εξίσωση (13) είναι το θεώρημα ώθησης ορμής και η εξίσωση (14) το αντίστοιχο θεώρημα μεταβολής της στροφορμής, για την στροφική κίνηση.

Συμπέρασμα:

Το τελευταίο παράδειγμα αναδεικνύει νομίζω τις αρχές που θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να αντιμετωπίσουμε ένα γενικό πρόβλημα κρούσης δύο επίπεδων μηχανικών στερεών.

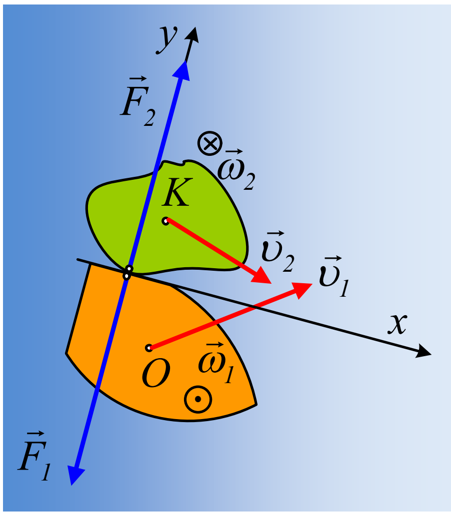
Αρχή διατήρηση της ορμής, Αρχή διατήρηση Στροφορμής, διατήρηση της κινητικής ενέργειας, αλλά και τους γενικευμένους νόμους του Νεύτωνα, τόσο για τη μεταφορική, όσο και για την στροφική κίνηση.

Ας μην μας διαφεύγει όμως, ότι τεράστια σημασία έχει και η γεωμετρία των σωμάτων αλλά και το σημείο κρούσης. Για παράδειγμα μπορείτε να δείτε το διαφορετικό αποτέλεσμα που θα προκύψει κατά την κρούση ενός δίσκου με ένα ακίνητο τριγωνικό στερεό, όπως στα παρακάτω σχήματα.



Όπου στο μεσαίο σχήμα η δύναμη στο τριγωνικό στερεό περνά από το κέντρο μάζας (cm), οπότε δεν θα στραφεί, ενώ στο πρώτο θα στραφεί δεξιόστροφα και στο τρίτο αριστερόστροφα.

Αλλά και για την ελαστική κρούση δύο σωμάτων τυχαίου σχήματος, όπως στο παρακάτω σχήμα



Ο ίδιος τρόπος δουλειάς, όπως στο τελευταίο 6^{o} παράδειγμα θα εφαρμοστεί, αφού πρώτα αναλυθούν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας στους άξονες x και y, ενώ πρέπει να δίνονται και οι αποστάσεις των κέντρων μάζας O και K από τους φορείς των δύο ασκούμενων δυνάμεων.

dmargaris@gmail.com