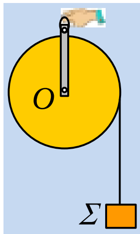
Μια κινούμενη τροχαλία.



Γύρω από μια τροχαλία μάζας M=0,8kg έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα Σ μάζας m=0,1kg. Συγκρατούμε τα δυο σώματα με τα χέρια μας, ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο (χωρίς να ασκεί δυνάμεις στα σώματα) και σε μια στιγμή $t_0=0$, αφήνουμε το σώμα Σ να κινηθεί, ενώ συγκρατούμε σταθερή την τροχαλία. Τη στιγμή $t_1=1s$ αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_2=11N$, μέχρι τη στιγμή t_2 που η τροχαλία αποκτά ταχύτητα $\upsilon_2=1m/s$.

i) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης την οποία ασκούσαμε στην τροχαλία από 0-t_1.

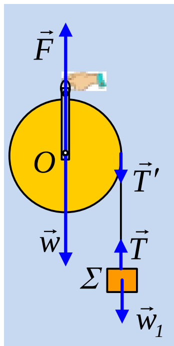
ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_2.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-t_2.

iv) Ποιες ενεργειακές μεταβολές εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_1$; Πώς συνδέονται οι μεταβολές αυτές με τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα;

Για την τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της $I=\frac{1}{2}MR^2$, ενώ $g=10m/s^2$.

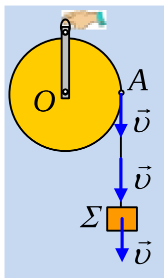
Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου αφού το νήμα είναι αβαρές Τ΄=Τ και $\vec{F}$ η δύναμη που ασκούμε στον άξονα της τροχαλίας. Από 0-t_1 συγκρατούμε την τροχαλία, το νήμα ξετυλίγεται και το σώμα Σ κατέρχεται. Παίρνοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε:

Σώμα Σ: $\Sigma F=m\cdot\alpha \rightarrow mg-T=m\cdot\alpha$ (1)

Τροχαλία: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'\cdot R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T=\frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)



Αλλά το σώμα Σ έχει κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα με κάθε σημείο του νήματος, συνεπώς και με το σημείο Α του νήματος το οποίο έρχεται σε επαφή με την τροχαλία:

$$\upsilon_\Sigma=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R \rightarrow a=\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R=a_{\gamma\omega\nu}R \quad (3)$$

Οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη μας και την σχέση (3), παίρνουμε:

$$a=\frac{mg}{m+\frac{1}{2}M}=\frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}1+0{,}4}m/s^2=2m/s^2$$

Αλλά τότε από την ισορροπία της τροχαλίας, όσον αφορά τη μεταφορική της κίνηση, θα έχουμε:

$$F=w+T'=Mg+\frac{1}{2}M\cdot\alpha=0{,}8\cdot 10N+\frac{1}{2}\cdot 0{,}8\cdot 2N=8{,}8N$$

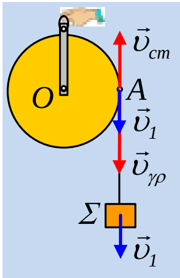
ii) Μόλις αυξήσουμε το μέτρο της ασκούμενης κατακόρυφης δύναμης F, η τροχαλία θα επιταχυνθεί προς τα πάνω και έστω ότι το σώμα Σ συνεχίζει να επιταχύνεται προς τα κάτω. Δουλεύοντας με τα μέτρα των μεγεθών, θα έχουμε:

Τροχαλία: Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_y=M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F\text{-}Mg\text{-}T'=M\cdot\alpha_{cm}$ (4)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'\cdot R=\frac{1}{2} MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'=\frac{1}{2} MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (5)

Σώμα Σ: $\Sigma F=m\cdot\alpha_1 \rightarrow mg\text{-}T=m\cdot\alpha_1$ (6)

Ας έρθουμε τώρα στο σημείο Α, όπου το νήμα εφάπτεται της τροχαλίας. Το σημείο αυτό, σαν σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας έχει μια συνιστώσα ταχύτητα ίση με υ_{cm} και μια $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$, όπως στο σχήμα, οπότε η συνολική ταχύτητα, ίση με την ταχύτητα υ_1 του σώματος Σ, θα είναι:



$$\upsilon_1=\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cm} \rightarrow \upsilon_1=\omega R-\upsilon_{cm} \rightarrow$$

$$\alpha_1=\frac{d\upsilon_1}{dt}=\frac{d\omega}{dt}R-\frac{d\upsilon_{cm}}{dt}=a_{\gamma\omega\nu}R-a_{cm} \quad (7)$$

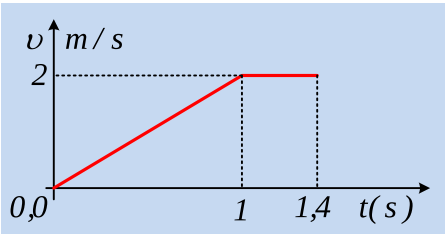
Οπότε η (5) γίνεται $T'=\frac{1}{2} MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $2\cdot T=M\alpha_1+M\alpha_{cm}$ και με αντικατάσταση στις σχέσεις (4) και (6) παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}5M\alpha_{cm}+0{,}5m\alpha_1=F-Mg \\ 0{,}5M\alpha_{cm}+(m+0{,}5M)\alpha_1=mg \end{array}\right\} \quad \alpha_1=0 \;\; \text{και} \;\; \alpha_{cm}=2{,}5m/s^2$$

Αλλά τότε για την κίνηση του κέντρου μάζας της τροχαλίας έχουμε:

$$\upsilon_2=\alpha_{cm}\cdot\Delta t \rightarrow t_2-t_1=\frac{\upsilon_2}{a_{cm}}=\frac{1}{2{,}5}s=0{,}4s \rightarrow t_2=1{,}4s$$

iii) Το σώμα Σ, από 0-1s κινείται με σταθερή επιτάχυνση, οπότε αποκτά ταχύτητα $\upsilon_1=\alpha\cdot t_1=2\cdot 1m/s=2m/s$, ενώ στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



iv) Στο χρονικό διάστημα από 1s έως 1,4s, η τροχαλία ανέρχεται κατά:

$$y=\frac{1}{2}\alpha_{cm}\cdot(\Delta t)^2=\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 0{,}4^2 m=0{,}2m.$$

Αλλά τότε έχει αυξηθεί η δυναμική της ενέργεια κατά:

$$\Delta U_{\tau\rho}=Mg\cdot y=0{,}8\cdot 10\cdot 0{,}2J=1{,}6J.$$

Ταυτόχρονα έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega=\omega_1+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\Delta t$, όπου $\omega_1=\frac{\upsilon_1}{R}$ ενώ λόγω της σχέσης (7) $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\alpha_{cm}/R$, οπότε παίρνουμε $\omega=\frac{\upsilon_1}{R}+\frac{a_{cm}}{R}(t_2-t_1)=\frac{2}{R}+\frac{2{,}5\cdot 0{,}4}{R}=\frac{3}{R}$ (S.I.)

Συνεπώς έχει αποκτήσει και κινητική ενέργεια:

$$K=\frac{1}{2}M\upsilon_2^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\upsilon_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 \rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}0{,}8\cdot 1^2\,J + \frac{1}{4}0{,}8R^2\cdot\left(\frac{3}{R}\right)^2 J = 0{,}4J + 1{,}8J = 2{,}2J$$

Ενώ τη στιγμή t_1 είχε κινητική ενέργεια:

$$K_{t1} = \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2 = \frac{1}{4}MR^2\left(\frac{\upsilon_1}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}M\upsilon_1^2 = \frac{1}{4}0{,}8\cdot 2^2\,J = 0{,}8J$$

Έχουμε δηλαδή **αύξηση** της μηχανικής ενέργειας της τροχαλίας κατά:

$$\Delta E_{\tau\rho} = \Delta U + \Delta K = 1{,}6J + (2{,}2J - 0{,}8J) = 3J.$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το σώμα Σ κατεβαίνει κατά $y_1=\upsilon_1\cdot\Delta t=2\cdot 0{,}4m=0{,}8m$.

Αλλά τότε η δυναμική του ενέργεια **μειώνεται** κατά $\Delta U_1=mgy_1=0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}8J=0{,}8J$, ενώ η κινητική του ενέργεια παρέμεινε σταθερή, αφού κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Αν θέλουμε να μιλήσουμε για το σύστημα, προφανώς έχουμε αύξηση της μηχανικής του ενέργειας κατά:

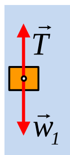
$$\Delta E_{o\lambda} = \Delta E_{\tau\rho} + \Delta E_{\Sigma} = +3J - 0{,}8J = 2{,}2J.$$

Τα βάρη των σωμάτων είναι δυνάμεις τα έργα των οποίων εκφράζουν την ενέργεια η οποία μετατρέπεται από δυναμική σε κινητική και αντίστροφα. Το έργο επίσης της τάσης του νήματος, εσωτερική δύναμη, μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο. Έτσι η μόνη δύναμη που μπορεί να μεταβάλλει την μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι η ασκούμενη δύναμη F.

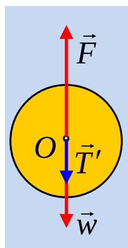
Πράγματι:

$$W_F = F\cdot y = 11\cdot 0{,}2J = 2{,}2\,J = \Delta E_{o\lambda}.$$

Ας δούμε τώρα λίγο αναλυτικότερα το τι συμβαίνει, με τη βοήθεια των έργων.



Κατά την κίνηση του σώματος Σ, η δυναμική του ενέργεια μειώνεται κατά 0,8J αφού το βάρος παράγει έργο $W_{w1}=+mgy_1= +\ 0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}8\ J=\ 0{,}8J$. Αλλά πάνω του ασκείται και η τάση του νήματος το έργο της οποίας είναι $W_T=-T\cdot y_1=-0{,}8J$, πράγμα που σημαίνει ότι αφαιρείται ενέργεια 0,8J από το σώμα η οποία μεταφέρεται μέσω του νήματος στην τροχαλία.



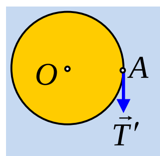
Για την μεταφορική κίνηση της τροχαλίας έχουμε:

$$W_F=F\cdot y=11\cdot 0{,}2J=2{,}2\ J,\ W_{T'}=-T\cdot y=-mg\cdot y=-0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}2J=-0{,}2J\ \text{και}$$

$$W_w=-Mgy= -0{,}8\cdot 10\cdot 0{,}2J= -\ 1{,}6J$$

Συνεπώς η μεταφορική κινητική της ενέργεια μεταβάλλεται κατά:

$$\Delta K= K_{\mu\varepsilon\tau}=W_F+W_{T'}+W_w=2{,}2J-0{,}2J-1{,}6J=0{,}4J.$$



Κατά την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας αυτή διαγράφει γωνία:

$$\theta=\omega_1\cdot(\Delta t)+\ \frac{1}{2}\ \alpha_{\gamma\omega\nu}(\Delta t)^2= \frac{\upsilon_1}{R}\cdot(\Delta t)+\frac{1}{2}\frac{a_{cm}}{R}(\Delta t)^2$$

Οπότε το αντίστοιχο έργο της ροπής που ευθύνεται για την περιστροφή είναι:

$$W_\tau = \tau \cdot \theta = T'R \cdot \theta = mgR \cdot \left(\frac{\upsilon_1}{R} \cdot (\Delta t) + \frac{1}{2}\frac{a_{cm}}{R}(\Delta t)^2 \right) = mg\upsilon_1(\Delta t) + \frac{1}{2}a_{cm}(\Delta t)^2 \rightarrow$$

$$W_\tau = mg\upsilon_1(\Delta t) + mg\frac{1}{2}a_{cm}(\Delta t)^2 = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0{,}4J + \frac{1}{2}2{,}5 \cdot 0{,}4^2 J = 1J$$

Ίσο με την αύξηση της κινητικής περιστροφικής ενέργειας της τροχαλίας, αφού:

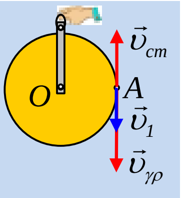
$$\Delta K_{\pi\varepsilon\rho} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2 \rightarrow$$

$$\Delta K_{\pi\varepsilon\rho} = 1{,}8J - 0{,}8J = 1J.$$

Πόσο είναι το έργο της τάσης του νήματος; Το έργο της τάσης Τ, η οποία ασκείται στο σώμα Σ υπολογίστηκε ίσο με -0,8J, πράγμα που σημαίνει ότι μέσω του νήματος μεταφέρεται ενέργεια 0,8J στην τροχαλία. Ναι, αλλά πώς γίνεται η περιστροφική κινητική ενέργεια να αυξήθηκε κατά 1J και όχι κατά 0,8J; Όταν μελετήσαμε τη μεταφορική κινητική ενέργεια είχαμε βρει ότι $W_{T'}$=-0,2J, πράγμα που σημαίνει ότι «αφαιρέθηκαν» 0,2J μεταφορικής κινητικής ενέργειας από την τροχαλία, τα οποία προστιθέμενα στα 0,8J της ενέργειας που μεταφέρονται από το σώμα Σ, μας δίνουν τη συνολική περιστροφική κινητική ενέργεια της τροχαλίας.

Σχόλια:

1) Παρατηρώντας το διπλανό σχήμα όπου έχουμε σχεδιάσει τις ταχύτητες του σημείου Α, βλέπουμε ότι η γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής $\upsilon_{\gamma\rho} > \upsilon_{cm}$ αφού το νήμα κινείται προς τα κάτω. Εδώ θα μπορούσε να προκύψει το **λάθος**, αν κάποιος παραγωγίζοντας υποστηρίξει ότι και $\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R > \alpha_{cm}$, πράγμα το οποίο, όπως αποδείχτηκε παραπάνω δεν ισχύει. Στην άσκηση αυτή βρήκαμε ότι $\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \alpha_{cm}$!

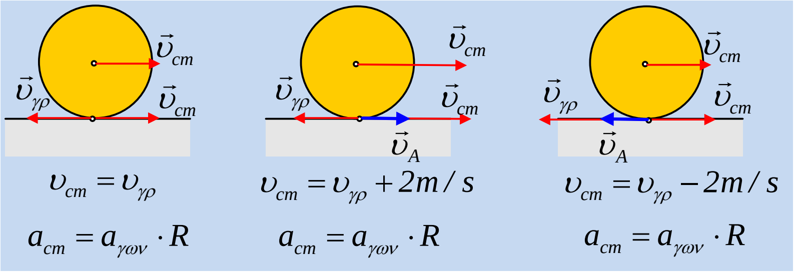


Τι σημαίνει αυτό; Ότι μεταβάλλεται και η υ_{cm} και η γωνιακή ταχύτητα οπότε $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, αλλά η διαφορά $\omega R - \upsilon_{cm}$ κάθε στιγμή παραμένει σταθερή!

Ας το δούμε αλλιώς με βάση τα μαθηματικά.

Το ότι ισχύει $\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R$ δεν σημαίνει ότι $\upsilon_{cm} = \omega R$ αφού η ολοκλήρωση μας δίνει $\upsilon_{cm} = \omega R + C$, όπου C μια σταθερά.

2) Το παραπάνω βρίσκει εφαρμογή και στην κύλιση. Αν ένας τροχός κυλίεται τότε ισχύει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, αλλά ***δεν ισχύει*** το αντίστροφο. Δείτε τι συμβαίνει στα τρία παρακάτω σχήματα.



3) Το σύστημα μελέτης μας ήταν η τροχαλία, το σώμα Σ με το νήμα που τα συνδέει, αλλά και **η Γη**, αρκεί να σκεφτούμε ότι όταν μιλάμε για δυναμική ενέργεια, είναι ενέργεια αλληλεπίδρασης και αναφέρεται στο σύστημα Γη-σώμα και όχι μόνο στο σώμα. Αλλά τότε οι δυνάμεις που ασκούνται στα διάφορα μέλη του συστήματος μας, μπορούν να χωριστούν σε δυο ομάδες:

i) Εσωτερικές δυνάμεις.

Αυτές είναι τα βάρη (και οι αντιδράσεις τους που ασκούνται στη Γη, η οποία όμως λόγω μεγάλης μάζας θεωρείται ακίνητη, οπότε δεν παράγουν έργα) και οι δυνάμεις που το νήμα ασκεί στα σώματα.

Τα έργα των δυνάμεων αυτών εκφράζουν την ενέργεια που μεταφέρεται από το ένα σώμα στο άλλο ή την ενέργεια που μετατρέπεται από μια μορφή σε άλλη. Στο παράδειγμά μας, το έργο του βάρους της τροχαλίας, εκφράζει την αύξηση της δυναμικής της ενέργειας, ενώ το βάρος του σώματος Σ τη μείωση της δυναμικής του ενέργειας.

Αν δεν υπήρχε το νήμα, το σώμα Σ θα επιταχυνόταν και η μείωση της δυναμικής του ενέργειας θα ήταν ίση με την αύξηση της κινητικής του ενέργειας. Εδώ όμως ασκείται και η τάση του νήματος και η ενέργεια μεταφέρεται από το ένα σώμα (σώμα Σ), στο άλλο (τροχαλία).

Αξίζει να επισημανθεί ότι αν στα σώματα ασκούνται και κάποιες μη συντηρητικές δυνάμεις, όπως η τριβή, τότε θα έχουμε και κάποια ενέργεια που θα υποβαθμίζεται σε θερμική, οπότε θα έχουμε ισόποση μείωση της μηχανικής ενέργειας.

ii) Εξωτερικές δυνάμεις.

Στην περίπτωσή μας, η ασκούμενη από εμάς δύναμη F, η οποία μέσω του έργου της μεταφέρει ενέργεια στο σύστημα. Έτσι το έργο της υπολογίστηκε ίσο με 2,2J όση θα είναι και η αύξηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος.

dmargaris@sch.gr