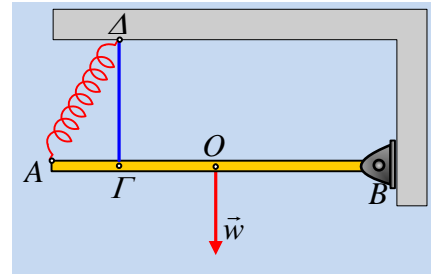


Μια ράβδος στρέφεται επιμηκύνοντας το ελατήριο.

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους $\ell = 1\text{m}$ και μάζας $M = 15\text{kg}$, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από άρθρωση στο άκρο της B και ισορροπεί σε οριζόντια θέση δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος σε σημείο της Γ, όπου $(AG) = 0,2\text{m}$. Παίρνουμε ένα ιδανικό ελατήριο με σταθερά $k = 225\text{N/m}$ και φυσικό μήκος $\ell_0 = (4/15)\text{m}$ και τεντώνοντάς το, συνδέουμε τα άκρα του στο άκρο A της ράβδου και στο σημείο πρόσδεσης του νήματος Δ, οπότε ο άξονας του ελατηρίου σχηματίζει με τη ράβδο γωνία φ , όπου $\eta\mu\varphi = 0,8$ (συνφ = 0,6).



i) Να βρεθεί η τάση του νήματος.

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Να υπολογισθεί η αρχική επιτάχυνση του άκρου A της ράβδου.

iii) Να βρεθεί ως προς το άκρο B της ράβδου, η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, τη στιγμή που το ελατήριο θα γίνει κατακόρυφο, αν δεν αναπτύσσονται τριβές στην άρθρωση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς την άρθρωση $I_B = 1/3 M\ell^2$ και $g = 10\text{m/s}^2$.

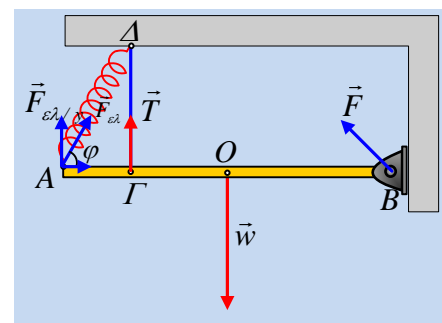
Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου για το μήκος του ελατηρίου έχουμε:

$$\text{συν}\varphi = \frac{(AG)}{(AD)} \rightarrow (AD) = \ell' = \frac{(AG)}{\text{συν}\varphi} = \frac{0,2\text{m}}{0,6} = \frac{1}{3}\text{m}$$

Οπότε η δύναμη του ελατηρίου έχει μέτρο:

$$F_{ελ} = k \cdot \Delta \ell = k \cdot (\ell' - \ell_0) = 225 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{15} \right) = 15\text{N}$$



i) Από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου έχουμε $\Sigma F = 0$ και $\Sigma \tau = 0$, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε το σημείο B και έχουμε:

$$w \cdot \frac{\ell}{2} - T \cdot (BG) - F_{ελ} \eta\mu\varphi \cdot \ell = 0 \quad \text{ή} \quad 150 \cdot 0,5 \text{ Nm} - T \cdot 0,8\text{m} - 15 \cdot 0,8 \cdot 1\text{Nm} = 0 \rightarrow$$

$$T = 78,75\text{N}$$

ii) Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφορμική κίνηση της ράβδου γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο B (άρθρωση), θεωρώντας θετική φορά, την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού και παίρνουμε:

$$w \cdot \frac{\ell}{2} - F_{ελ} \eta\mu\varphi \cdot \ell = I_B a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{Mg \cdot \frac{\ell}{2} - F_{ελ} \eta\mu\varphi \cdot \ell}{\frac{1}{3} M\ell^2} = \frac{3Mg - 6F_{ελ} \eta\mu\varphi}{2M\ell} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3Mg - 6F_{ελ}\eta\mu\varphi}{2M\ell} = \frac{3 \cdot 15 \cdot 10 - 6 \cdot 15 \cdot 0,8}{2 \cdot 15 \cdot 1} \text{rad} / \text{s}^2 = 12,6 \text{rad} / \text{s}^2$$

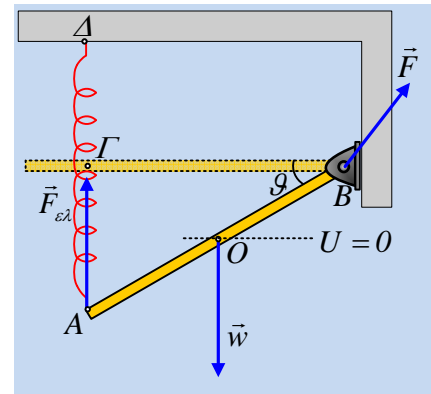
iii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη ράβδο στη θέση που το ελατήριο είναι κατακόρυφο. Στη θέση αυτή έχουμε:

$$\sigma\nu\nu\vartheta = \frac{(B\Gamma)}{(AB)} = 0,8 \rightarrow \eta\mu\vartheta = 0,6$$

Αλλά τότε $(A\Gamma) = \ell \cdot \eta\mu\vartheta = 0,6\text{m}$

Αν επιστρέψουμε όμως στο αρχικό μας σχήμα:

$$(\Gamma\Delta) = (A\Delta) \cdot \eta\mu\varphi = \ell' \cdot \eta\mu\varphi = \frac{1}{3} \cdot 0,8\text{m} = \frac{4}{15}\text{m} = \ell_o.$$



Συνεπώς τη στιγμή που το ελατήριο γίνεται κατακόρυφο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell' = (\Gamma A) = 0,6\text{m}$, οπότε εφαρμόζοντας για το σύστημα ελατήριο-ράβδος-Γη τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το μέσον O, όπως στο σχήμα, έχουμε:

$$K_{αρχ} + U_{β/αρχ} + U_{ελ/αρχ} = K_{τελ} + U_{β/τελ} + U_{ελ/τελ} \rightarrow$$

$$Mg \frac{\ell}{2} \eta\mu\theta + \frac{1}{2} k (\Delta\ell)^2 = \frac{1}{2} I_B \omega^2 + \frac{1}{2} k (\Delta\ell')^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\ell\eta\mu\theta + k((\Delta\ell)^2 - (\Delta\ell')^2)}{\frac{1}{3}M\ell^2}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0,6 + 225 \left(\left(\frac{1}{15} \right)^2 - 0,6^2 \right)}{\frac{1}{3}15 \cdot 1^2}} = \sqrt{2} \text{rad} / \text{s}$$

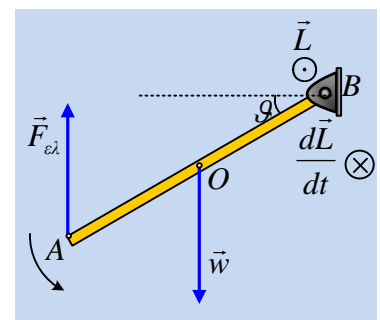
Αλλά τότε η στροφορμή της ράβδου κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής της είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη και μέτρο:

$$L = I_B \omega = \frac{1}{3} M \ell^2 \omega = \frac{1}{3} 15 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} \text{kgm}^2 / \text{s} = 5\sqrt{2} \text{kgm}^2 / \text{s}$$

Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον ίδιο άξονα, είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = F_{ελ} \cdot \ell \cdot \sigma\nu\nu\vartheta - Mg \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\nu\nu\vartheta \rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = k\Delta\ell \cdot \ell \cdot \sigma\nu\nu\vartheta - Mg \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\nu\nu\vartheta = \left(225 \cdot 0,6 \cdot 0,8 - 15 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,8 \right) \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = 48 \text{kgm}^2 / \text{s}^2$$



dmargaris@sch.gr