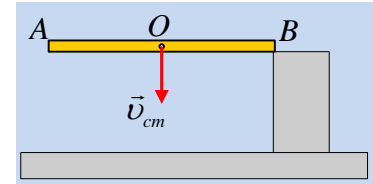


Μια ράβδος συγκρούεται με ένα σκαλοπάτι

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους ℓ και μάζας M πέφτει ελεύθερα και σε μια στιγμή το άκρο της B κτυπά στην πάνω πλευρά ενός λείου σκαλοπατιού. Ελάχιστα πριν την κρούση, το κέντρο μάζας O της ράβδου έχει κατακόρυφη ταχύτητα $v_{cm}=2\text{m/s}$, ενώ το άκρο A έχει μηδενική ταχύτητα.

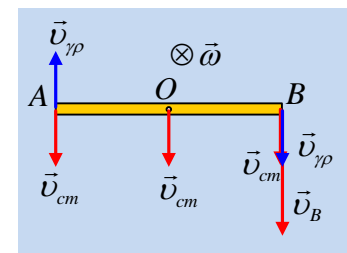


- i) Ποια η ταχύτητα του άκρου B της ράβδου ελάχιστα πριν την κρούση;
- ii) Κατά τη διάρκεια της κρούσης της ράβδου με το σκαλοπάτι:
 - α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη.
 - β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
 - γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
 - δ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή ως προς κατάλληλα επιλεγμένο σημείο.
- iii) Αν το άκρο B, αμέσως μετά την κρούση, έχει κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω μέτρου 1m/s , ενώ το άκρο A κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα κάτω μέτρου 3m/s , να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή όχι.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$.

Απάντηση:

- i) Αφού το άκρο της ράβδου A, δεν έχει την ταχύτητα του κέντρου μάζας O, η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη, την οποία μπορούμε να μελετήσουμε ως μια μεταφορική με ταχύτητα ίση με v_{cm} και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον O, με γωνιακή ταχύτητα ω , όπως στο σχήμα.



Αλλά τότε για την ταχύτητα του άκρου A ισχύει:

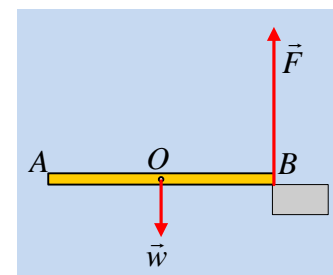
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho} \rightarrow$$

$$v_{\gamma\rho} = v_{cm} = 2\text{m/s} \rightarrow$$

$$\omega \frac{\ell}{2} = v_{cm} \rightarrow \omega \ell = 2v_{cm} = 4\text{m/s}$$

Αλλά τότε το άκρο B έχει ταχύτητα $v_B = v_{cm} + v_{\gamma\rho} = 4\text{m/s}$, κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.

- ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο στη διάρκεια της κρούσης, όπου \vec{F} η δύναμη από το σκαλοπάτι, κάθετη στο λείο σκαλοπάτι, συνεπώς κατακόρυφη (ακόμη και αν το επίπεδο δεν ήταν λείο η δύναμη θα ήταν κατακόρυφη, αφού η ταχύτητα του άκρου B είναι κατακόρυφη!). Αλλά τότε στη ράβδο ασκούνται δυνάμεις που μεταβάλουν και την ορμή της και τη στροφορμή της, ως



προς οποιοδήποτε σημείο και αν την υπολογίσουμε. Έτσι έχουμε:

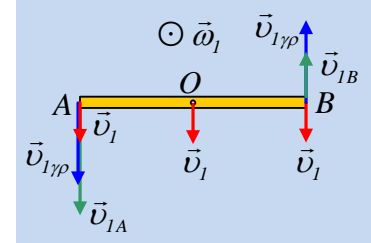
α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη. **Σ.**

β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή. **Λ.**

γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή. **Λ.**

δ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή ως προς κατάλληλα επιλεγμένο σημείο. **Λ.**

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες των άκρων A και B της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. Αφού το άκρο A έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το B θα πρέπει η ταχύτητα κέντρου μάζας και η γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης της ράβδου, να έχουν την ίδια φορά, αλλά τότε η ταχύτητα κέντρου μάζας, έστω v_1 και η γωνιακή ταχύτητα ω_1 θα είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας v_1 θα είναι κατακόρυφη αφού οι δυνάμεις που ασκήθηκαν στη ράβδο στη διάρκεια της κρούσης είναι κατακόρυφες, όπως και η ταχύτητα v_{cm} πριν την κρούση.



Αλλά τότε:

$$v_{1A} = v_1 + \omega_1 \frac{\ell}{2} \quad \text{και} \quad v_{1B} = \omega_1 \frac{\ell}{2} - v_1$$

και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\omega_1 \ell = v_{1A} + v_{1B} = 4m/s = 2v_{cm}$$

οπότε και $v_1 = v_{1A} - \omega_1 \frac{\ell}{2} = 3m/s - 2m/s = 1m/s = \frac{1}{2}v_{cm}$.

Η αρχική κινητική ενέργεια της ράβδου ήταν:

$$K_{\pi\rho} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M \ell^2 \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{24} M (2v_{cm})^2 \rightarrow$$

$$K_{\pi\rho} = \frac{2}{3} M v_{cm}^2 \quad (1)$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι ίση:

$$K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_1^2 = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M \ell^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{1}{2} v_{cm} \right)^2 + \frac{1}{24} M (2v_{cm})^2 \rightarrow$$

$$K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{7}{24} M v_{cm}^2 \quad (2)$$

Προφανώς από (1) και (2) $K_{\mu\epsilon\tau} < K_{\alpha\rho\chi}$ και κατά συνέπεια η κρούση είναι ανελαστική.

dmargaris@sch.gr