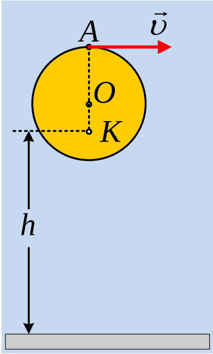
Ο δίσκος και η ταχύτητα ενός σημείου.



Ένας ομογενής δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείου του Κ, το οποίο απέχει από το κέντρο του Ο απόσταση (ΚΟ)= ½ R. Ένα σημείο Α στην περιφέρεια του δίσκου έχει ταχύτητα υ, τη στιγμή που η ακτίνα ΑΟ είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα. Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του Ο, δίνεται από την εξίσωση Ι= ½ MR^2, να υπολογιστούν συναρτήσει των Μ, R, g και υ:

i) Η κινητική ενέργεια του δίσκου στην παραπάνω θέση.

ii) Η μέγιστη ταχύτητα του σημείου Α στη διάρκεια της περιστροφής του δίσκου.

iii) Αν τη στιγμή που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ο άξονας περιστροφής σπάσει και ο δίσκος φτάνει στο έδαφος με πρώτο σημείο επαφής το σημείο Α, να βρεθεί το ελάχιστο ύψος h από το έδαφος, που βρισκόταν ο άξονας περιστροφής.

iv) Η τελική κινητική ενέργεια του δίσκου, στην παραπάνω περίπτωση.

Απάντηση:

i) Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του, με τη βοήθεια του θεωρήματος Steiner:

$$I_K = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2$$

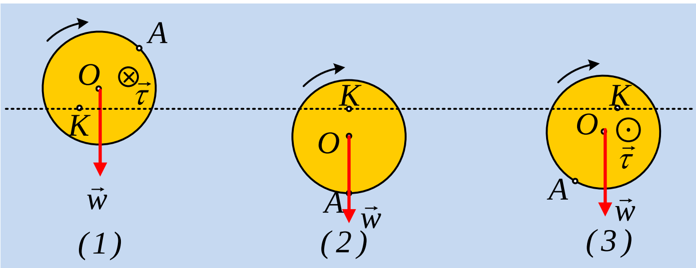
Εξάλλου το σημείο Α έχει ταχύτητα υ που συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου με τη σχέση υ=ω·r , οπότε:

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{\upsilon}{\frac{3}{2}R} = \frac{2\upsilon}{3R}$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$K = \frac{1}{2}I_K\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{4}MR^2\left(\frac{2\upsilon}{3R}\right)^2 = \frac{1}{6}M\upsilon^2$$

ii) Αν πάρουμε το δίσκο μετά από λίγο, στη θέση που δείχνει το σχήμα (1), η ροπή του βάρους επιταχύνει τον δίσκο αυξάνοντας την γωνιακή του ταχύτητα.



Αυτό θα συμβαίνει μέχρι η ακτίνα ΟΑ να γίνει κατακόρυφη σχ. (2), αφού από κει και πέρα η ασκούμενη ροπή αλλάζει φορά και ο δίσκος επιβραδύνεται.

Κατά συνέπεια ο δίσκος αποκτά μέγιστη γωνιακή ταχύτητα στη θέση που φαίνεται στο σχήμα (2), οπότε στην ίδια θέση το σημείο Α θα έχει τη μέγιστη (γραμμική) ταχύτητα.

Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από τη θέση του κέντρου μάζας Ο στη θέση (2) ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας και αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται, μιας και η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, παίρνουμε:

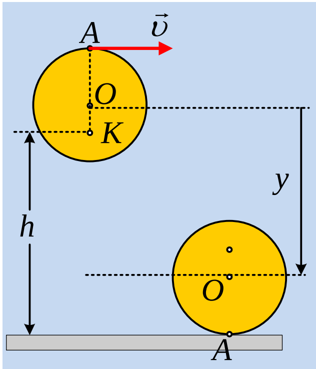
$$K_1+U_1=K_2+U_2\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_K\omega_1^2+MgR=\frac{1}{2}I_K\omega_2^2\rightarrow$$

$$\frac{1}{6}M\upsilon^2+MgR=\frac{1}{2}\frac{3}{4}MR^2\left(\frac{2\upsilon_2}{3R}\right)^2\rightarrow$$

$$\upsilon_2==\sqrt{\upsilon^2+6Rg}$$

iii) Τη στιγμή που σπάει ο άξονας, το κέντρο μάζας Ο έχει οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_{xcm}=\omega\cdot \frac{1}{2}R$ με αποτέλεσμα να εκτελέσει οριζόντια βολή (όσον αφορά τη μεταφορική κίνηση). Με βάση την αρχή ανεξαρτησίας, η κίνηση αυτή αναλύεται σε μια ευθύγραμμη ομαλή στον οριζόντιο άξονα x και μια ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα. Αλλά αφού ο δίσκος έρχεται σε επαφή με το έδαφος με το σημείο Α, ο χρόνος πτώσης θα είναι $t=kT+\frac{1}{2}T$ με $k\in Z$, όπου Τ η **σταθερή** περίοδος περιστροφής, αφού δεν ασκείται καμιά ροπή στον δίσκο, κατά την πτώση. Αλλά τότε



το ελάχιστο ύψος θα αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $t_1=\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}=\frac{3\pi R}{2\upsilon}$ και η αντίστοιχη μετατόπιση του κέντρου Ο θα είναι:

$$y=\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}g\left(\frac{3\pi R}{2\upsilon}\right)^2=\frac{9}{8}\frac{\pi^2 gR^2}{\upsilon^2}$$

Αλλά τότε $h=y+R-\frac{R}{2}=\frac{9}{8}\frac{\pi^2 gR^2}{\upsilon^2}+\frac{R}{2}$

iv) Θεωρώντας τώρα επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο Ο του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, θα έχουμε:

$$K_1+U_1=K_\tau+U_\tau\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_K\omega_1^2+Mgy=K_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{1}{6}M\upsilon^2+Mg\frac{9}{8}\frac{\pi^2 gR^2}{\upsilon^2}=\frac{1}{6}M\upsilon^2+\frac{9}{8}\frac{Mg^2\pi^2R^2}{\upsilon^2}$$

Σχόλιο:

Στην παραπάνω εξίσωση θεωρήσαμε ότι η αρχική κινητική ενέργεια του δίσκου είναι ίση με ½ $I_K\omega_1^2$, όση ήταν δηλαδή και πριν το σπάσιμο του άξονα. Θα μπορούσαμε βέβαια να γράψουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi}=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2$$

Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του δίσκου.

Αλλά όμως:

$$K_{\alpha\rho\chi}=\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2=\frac{1}{2}M\left(\omega_1\frac{R}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2=\frac{3}{8}MR^2\omega_1^2\rightarrow$$

$$K_{\alpha\rho\chi}=\frac{3}{8}MR^2\left(\frac{2\upsilon}{3R}\right)^2=\frac{1}{6}M\upsilon^2=\frac{1}{2}I_K\omega_1^2.$$

dmargaris@sch.gr