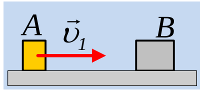
Ποσοστά μεταφοράς κινητικής ενέργειας.



1) Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα σώμα Α μάζας m με ταχύτητα υ_1 και συγκρούεται με ακίνητο σώμα Β μάζας Μ > m. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και κατά την κρούση μεταφέρεται στο σώμα Β το 75% της κινητικής ενέργειας του Α σώματος.

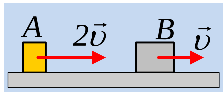
   i) Για τη μάζα του Β σώματος θα ισχύει:

   α) M=2m, β) M=3m, γ) M=4m, δ) M=5m

   ii) Αν M=4m, τότε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του Α σώματος που μεταφέρεται στο ακίνητο σώμα Β θα είναι:

   α) 56%, β) 64%, γ) 75%, δ) 84%.

   iii) Τι τιμή πρέπει να πάρει η μάζα Μ του σώματος Β, ώστε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που θα μεταφερθεί από το Α σώμα, στο Β, να είναι το ελάχιστο δυνατόν;



2) Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινούνται στην ίδια ευθεία και προς την ίδια κατεύθυνση δυο σώματα Α και Β με μάζες m και Μ και ταχύτητες 2υ και υ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα. Τα σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά.

   i) Η κινητική ενέργεια του Α σώματος, αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερή κατά την κρούση;

   ii) Αν m=M, ποιο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Α σώματος μεταφέρεται στο Β;

   iii) Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του Α σώματος που μεταφέρεται στο Β σώμα είναι 96%, τότε μεταξύ των μαζών ισχύει:

   α) Μ=2m, β) Μ=3m γ) Μ=4m.

Απάντηση:

1) Η ταχύτητα του Β σώματος μετά την κρούση είναι ίση:

$$\upsilon_2{}' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1$$

Οπότε η κινητική ενέργεια που αποκτά (ίση με την ενέργεια που μεταφέρεται από το κινούμενο σώμα) θα είναι ίση με:

$$K_2{}' = \frac{1}{2}M\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}M\frac{4m^2}{(m+M)^2}\upsilon_1^2 = \frac{4mM}{(m+M)^2}K_1$$

i) Αλλά τότε το κλάσμα της κινητικής ενέργειας του Α σώματος που μεταφέρεται στο Β είναι:

$$k = \frac{K_2'}{K_1} = \frac{\frac{4mM}{(m+M)^2}K_1}{K_1} = \frac{4mM}{(m+M)^2}\ , \quad (1)$$

Όμως αν το κλάσμα πολλαπλασιαστεί με το 100, θα πάρουμε το ποσοστό (π=k·100%), οπότε:

$$\frac{4mM}{(m+M)^2} = \frac{75}{100} \rightarrow 3M^2\text{-}10mM+3m^2=0$$

Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνει M=$\frac{1}{3}m$ ή M=3m, όπου η πρώτη απορρίπτεται από υπόθεση, συνεπώς M=3m. Σωστό το β).

ii) Από την σχέση (1) που παραπάνω αποδείξαμε, θα έχουμε:

$$k = \frac{K_2'}{K_1} = \frac{4mM}{(m+M)^2} = \frac{4m \cdot 4m}{(m+4m)^2} = \frac{16m^2}{25m^2} = \frac{16}{25}$$

Και το αντίστοιχο ποσοστό:

$$\pi = k \cdot 100\% = \frac{16}{25}100\% = 64\%$$

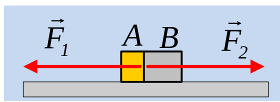
Σωστή η β) επιλογή.

iii) Κοιτάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι καθώς αυξάνεται η μάζα του ακίνητου σώματος, μειώνεται το ποσοστό της ενέργειας που μεταφέρεται από το Α στο Β σώμα. Αλλά τότε, το ποσοστό θα γίνει ελάχιστο, για την μεγαλύτερη δυνατή μάζα του σώματος Β, όπου αυτό μας οδηγεί στην περίπτωση όπου $M\to\infty$, όπου $\upsilon_2'\to 0$ και το σώμα Α ανακλάται με ταχύτητα $\upsilon_1'=-\upsilon_1$. Αλλά τότε το Α σώμα «διατηρεί» όλη την κινητική του ενέργεια και το ποσοστό μεταφοράς είναι 0%.

Σχόλιο:

Στο παραπάνω συμπέρασμα, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε με καθαρή μαθηματική «οδό». Προτιμήσαμε όμως μια «απόδειξη» που να στηρίζεται στην θεωρία της ελαστικής κρούσης. Βέβαια ας μην ξεχνάμε ότι στην πραγματικότητα κάποιο ποσό ενέργειας μεταφέρεται στο Β σώμα, ακόμη και στην περίπτωση αυτή, οπότε θα ήταν ίσως καλύτερα να λέγαμε ότι το ζητούμενο ποσοστό τείνει στο μηδέν και δεν είναι ίσο με μηδέν.

2) Κατά τη διάρκεια της κρούσης (αφού το Α σώμα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Β, θα το …προλάβει και θα συγκρουστούν!!!) στο σώμα Α ασκείται η δύναμη $\mathbf{F_1}$ από το Β και η αντίδρασή της $\mathbf{F_2}$ θα ασκηθεί στο Β, όπως στο διπλανό σχήμα.



i) Αλλά τότε θα μειωθεί η ταχύτητα του σώματος Α και θα αυξηθεί η ταχύτητα του Β. Συνεπώς θα μειωθεί επίσης και η κινητική ενέργεια του Α σώματος.

ii) Η ταχύτητα του Α σώματος μετά την κρούση είναι ίση:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (1) \rightarrow$$

$$\upsilon_1' = \frac{0}{2m}\upsilon_1 + \frac{2m}{2m}\upsilon_2 = \upsilon$$

Οπότε το κλάσμα μείωσης της κινητικής του ενέργειας είναι:

$$k=\frac{K_{1\alpha\rho\chi}-K_{1\tau\varepsilon\lambda}}{K_{1\alpha\rho\chi}}=\left(1-\frac{K_{1\tau\varepsilon\lambda}}{K_{1\alpha\rho\chi}}\right)=\left(1-\frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}m(2\upsilon)^2}\right)=\frac{3}{4} \quad (2)$$

Συνεπώς το ζητούμενο ποσοστό είναι π=k·100%=75%.

iii) Από την παραπάνω σχέση (2) παίρνουμε:

$$k=\frac{K_{1\alpha\rho\chi}-K_{1\tau\varepsilon\lambda}}{K_{1\alpha\rho\chi}}=\left(1-\frac{K_{1\tau\varepsilon\lambda}}{K_{1\alpha\rho\chi}}\right)=\left(1-\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m(2\upsilon)^2}\right)=\left(1-\frac{\upsilon_1'^2}{4\upsilon^2}\right)=\frac{96}{100}\rightarrow$$

$$\frac{\upsilon_1'^2}{4\upsilon^2}=0{,}04\rightarrow\upsilon_1'=\pm0{,}4\upsilon$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

α) $$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2\rightarrow 0{,}4\upsilon=\frac{m-M}{m+M}2\upsilon+\frac{2M}{m+M}\upsilon\rightarrow$$

$$\frac{2m}{m+M}=0{,}4\rightarrow M=4m$$

β) $$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2\rightarrow -0{,}4\upsilon=\frac{m-M}{m+M}2\upsilon+\frac{2M}{m+M}\upsilon\rightarrow$$

$$\frac{2m}{m+M}=-0{,}4$$

Η δεύτερη περίπτωση απορρίπτεται αφού δεν μπορεί η μάζα να είναι αρνητική, οπότε M=4m.

Σωστό το γ)

Σχόλιο:

Στο πρώτο ερώτημα υπολογίσαμε το κλάσμα απώλειας της κινητικής ενέργειας του Α σώματος από τη σχέση $k=\frac{K_2'}{K_1}$ αφού όση κινητική ενέργεια «χάνει» το Α σώμα μεταφέρεται στο Β και αφού ήταν αρχικά ακίνητο, θα είναι ίση και με την κινητική ενέργεια που αποκτά.

Στο δεύτερο όμως ερώτημα, υπολογίσαμε το αντίστοιχο κλάσμα $k=\frac{K_{1\alpha\rho\chi}-K_{1\tau\varepsilon\lambda}}{K_{1\alpha\rho\chi}}$, επικεντρωμένοι στην απώλεια της κινητικής ενέργειας του σώματος Α, αφού η τελική κινητική ενέργεια του Β σώματος θα είναι προφανώς μεγαλύτερη ($K_{B/\tau\varepsilon\lambda}=K_{B/\alpha\rho\chi}+\Delta K$, όπου ΔΚ η αύξηση της κινητικής ενέργειάς του λόγω κρούσης).

dmargaris@sch.gr