

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας στην ελεύθερη πτώση.

(με τη βοήθεια χρονοφωτογραφίας)

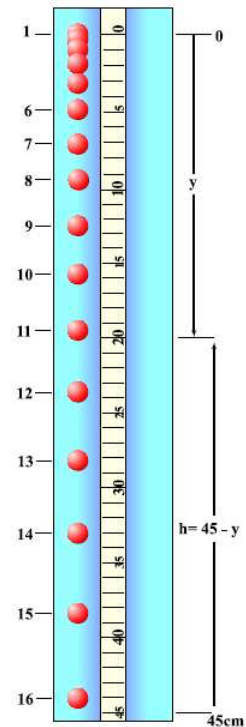
Αφήνουμε μια μικρή σφαίρα, μάζας 0,2kg, να πέσει ελεύθερα, δίπλα σε ένα χάρακα, βαθμολογημένο σε cm και τραβήξαμε μια πολλαπλή φωτογραφία (η μια θέση διαφέρει από την άλλη κατά 0,02s).

Επειδή οι πέντε αρχικές θέσεις μάλλον αλληλεπικαλύπτονται, θα μελετήσουμε την κίνηση μετά την 6^η θέση.

Έστω ότι ο χάρακας στηρίζεται στο έδαφος και ως πάρονομε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την ένδειξη 45cm, του χάρακα και η οποία είναι η θέση της σφαίρας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος.

- i) Με βάση την διπλανή εικόνα να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπου y η θέση της σφαίρας με βάση την ένδειξη που βλέπετε, t η χρονική στιγμή, Δy η μετατόπιση μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων και v_{μ} η μέση ταχύτητα στα διάφορα χρονικά διαστήματα.

Αρ. θέσης	t(s)	y(cm)	Δy (cm)	v_{μ} (cm/s)
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				



1) Πρώτη εκδοχή με γνωστό g .

- ii) Θεωρώντας ότι η τιμή της μέσης ταχύτητας, που παραπάνω υπολογίσατε, είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα στην αρχή του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος, (πράγμα όχι απόλυτα σωστό, αφού στην πραγματικότητα προσεγγίζει καλύτερα τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον του χρονικού διαστήματος), να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου h το ύψος της μπάλας από το επίπεδο που πήραμε ως ΕΜΔΕ, K η κινητική, U η δυναμική και E η μηχανική ενέργεια της μπάλας. Δίνεται ότι $g=10\text{m/s}^2$.

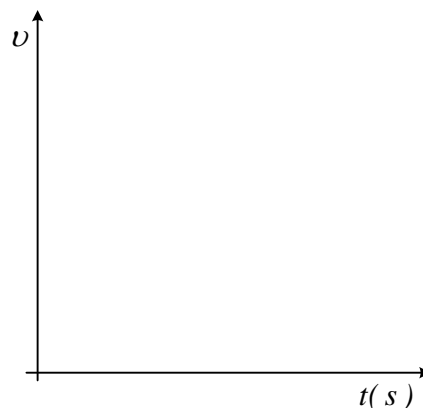
Αρ. θέσης	y(cm)	h(cm)	v(m/s)	v ² (m ² /s ²)	K(J)	U(J)	E _μ (J)
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

iii) Να υπολογίσετε την μηχανική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που αφήνεται να κινηθεί, καθώς και τη μέση τιμή της μηχανικής ενέργειας για τις παραπάνω θέσεις.

2) Δεύτερη εκδοχή. Υπολογισμός και του g.

i) Ας επιστρέψουμε στα αρχικά δεδομένα και ας περιοριστούμε στις θέσεις μετά την 10^η. Θεωρώντας ότι η μέση ταχύτητα που υπολογίσαμε είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος, π.χ. η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα 0,22s-0,24s είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή 0,23s, να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας και να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

t(s)	v(m/s)



ii) Με βάση το διάγραμμα v-t που σχεδιάσατε:

- α) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας
- β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Αρ. θέσης	t(s)	y(cm)	v(m/s)	v ² (m ² /s ²)	K(J)	h(cm)	U(J)	E _μ (J)
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								

Να υπολογίσετε την μηχανική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που αφήνεται να κινηθεί, καθώς και τη μέση τιμή της μηχανικής ενέργειας για τις παραπάνω θέσεις του πίνακα.

Απάντηση:

1) Πρώτη εκδοχή με γνωστό g.

- i) Παίρνοντας ως θέση της σφαίρας, τη θέση του κέντρου της και με βάση την εικόνα που μας δόθηκε, συμπληρώνουμε τις τιμές, όπως παρακάτω:

Αρ. θέσης	t(s)	y(cm)	Δy(cm)	v _μ (cm/s)
6	0,10	5,0	2,0	100
7	0,12	7,0	2,6	130
8	0,14	9,6	2,9	145
9	0,16	12,5	3,3	165
10	0,18	15,8	3,8	190
11	0,20	19,6	4,1	205
12	0,22	23,7	4,6	230
13	0,24	28,3	4,7	235
14	0,26	33,0	5,3	265
15	0,28	38,3	5,7	285
16	0,30	44,0	xxxxx	xxxxx

- ii) Με βάση τις τιμές του παραπάνω πίνακα και αφού λάβουμε υπόψη, με βάση το σχήμα, ότι $h=(45-y)\text{cm}$, ενώ $K=\frac{1}{2}mv^2$ και $U=mgh$ συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Αρ. θέσης	y(cm)	h(cm)	v(m/s)	v ² (m ² /s ²)	K(J)	U(J)	E _μ (J)
6	5,0	40,0	1,00	1,00	0,10	0,78	0,88
7	7,0	38,0	1,30	1,69	0,17	0,75	0,92
8	9,6	34,4	1,45	2,10	0,21	0,67	0,88

9	12,5	32,5	1,65	2,72	0,27	0,64	0,91
10	15,8	29,2	1,90	3,61	0,36	0,57	0,93
11	19,6	25,4	2,05	4,20	0,42	0,50	0,92
12	23,7	21,3	2,30	5,29	0,53	0,42	0,95
13	28,3	16,7	2,35	5,52	0,55	0,33	0,88
14	33,0	12,0	2,65	7,02	0,70	0,24	0,94
15	38,3	6,7	2,85	8,12	0,81	0,13	0,94

Η αρχική μηχανική ενέργεια είναι:

$$E_{αρχ} = U_{αρχ} = mgh = 0,2 \cdot 9,81 \cdot 0,45 \text{ J} = 0,88 \text{ J}$$

Ενώ η μέση τιμή της μηχανικής ενέργειας, με βάση τις τιμές του πίνακα:

$$\bar{E}_\mu = \frac{\sum E_i}{\nu} = \frac{3 \cdot 0,88 + 0,91 + 2 \cdot 0,92 + 0,93 + 2 \cdot 0,94 + 0,95}{10} = \frac{9,15}{10} \text{ J} \approx 0,92 \text{ J}$$

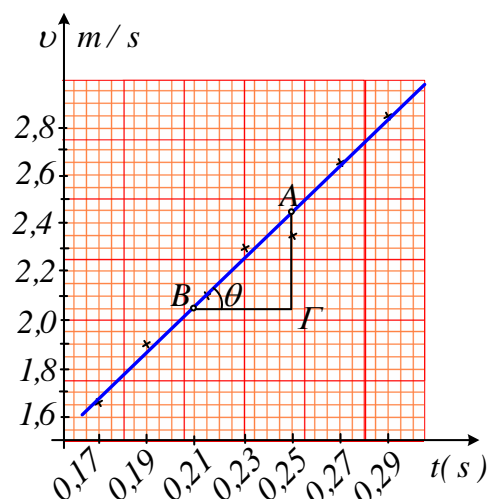
Σχόλιο:

Η μέση τιμή της μηχανικής ενέργειας που υπολογίσαμε, είναι μεγαλύτερη της αρχικής δυναμικής ενέργειας!! Ας σημειωθεί βέβαια ότι, εκτός από τυχαία υποκειμενικά (δικά μας) λάθη, κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο, αφού την τιμή της μέσης ταχύτητας που υπολογίζαμε, την αποδίδαμε στην αρχή του χρονικού διαστήματος, ενώ στην πραγματικότητα αντιστοιχούσε στην τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας στο μέσον του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος.

2) Δεύτερη εκδοχή. Υπολογισμός και του g.

- ι) Θεωρώντας ότι η μέση ταχύτητα που υπολογίσαμε είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσον του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος, π.χ. η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα 0,22s-0,24s είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή 0,23s, θα έχουμε:

t(s)	v(m/s)
0,17	1,65
0,19	1,90
0,21	2,05
0,23	2,30
0,25	2,35
0,27	2,65
0,29	2,85



- α) Αλλά από το παραπάνω διάγραμμα, η κλίση της ευθείας μας δίνει την επιτάχυνση:

$$\alpha = g = \frac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)} = \frac{0,4}{0,04} m/s^2 = 10 m/s^2$$

β) Με βάση το **διάγραμμα** συμπληρώνουμε τον πίνακα με τις τιμές της **στιγμιαίας** ταχύτητας για τις θέσεις της εικόνας:

Αρ. θέσης	t(s)	y(cm)	v(m/s)	v ² (m ² /s ²)	K(J)	h(cm)	U(J)	E _μ (J)
10	0,18	15,8	1,75	3,06	0,31	29,2	0,58	0,88
11	0,20	19,6	1,95	3,80	0,38	25,4	0,51	0,89
12	0,22	23,7	2,15	4,62	0,46	21,3	0,43	0,89
13	0,24	28,3	2,35	5,52	0,55	16,7	0,33	0,88
14	0,26	33,0	2,55	6,50	0,65	12,0	0,24	0,89
15	0,28	38,3	2,73	7,45	0,75	6,7	0,13	0,88
16	0,30	44,0	2,93	8,58	0,86	1,0	0,02	0,88

Η αρχική μηχανική ενέργεια είναι:

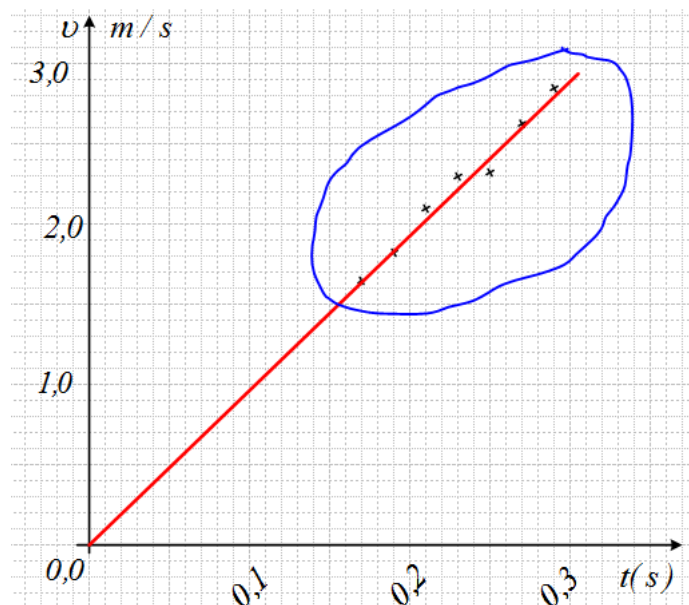
$$E_{αρχ} = U_{αρχ} = mgh = 0,2 \cdot 10 \cdot 0,45 J = 0,90 J$$

Ενώ η μέση τιμή της μηχανικής ενέργειας, με βάση τις τιμές του πίνακα:

$$\bar{E}_\mu = \frac{\sum E_i}{v} = \frac{4 \cdot 0,88 + 3 \cdot 0,89}{7} = \frac{6,19}{7} J \approx 0,88 J$$

Σχόλια:

- 1) Η 2^η εκδοχή, προφανώς έχει περισσότερη δουλειά και δεν νομίζω ότι είναι εύκολο να περάσει στους μαθητές, παρότι και περισσότερες πληροφορίες παρέχει και περισσότερο ουσιαστική είναι.
- 2) Το διάγραμμα v-t που ζητήθηκε, θα μπορούσε, αν βαθμολογούσαμε έτσι τους άξονες, ώστε η αρχή των αξόνων να αντιστοιχεί στο (0,0), να είχε τη μορφή:



Αλλά αφού οι τιμές που μας ενδιαφέρουν βρίσκονται σε μια μικρή περιοχή (που κλείνεται από την κλειστή μπλε γραμμή), είναι προτιμότερο για μεγαλύτερη ακρίβεια να χαράξουμε το διάγραμμα, όπως

το κάναμε παραπάνω και αυτό είναι κάτι που μπορούμε να το διδάξουμε.

dmargaris@gmail.com