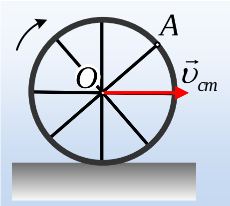
Οι ταχύτητες δύο σημείων ενός τροχού.



Ένας τροχός ακτίνας R=0,5m κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας του Ο. Ένα σημείο Α, βρίσκεται στο άκρο μιας ακτίνας του. Τη στιγμή t_1, όπου η ταχύτητα του σημείου Α γίνεται μέγιστη, ένα άλλο σημείο Β, έχει ταχύτητα μέτρου υ_1=0,8m/s της ίδιας διεύθυνσης με την ταχύτητα του σημείου Α. Τη στιγμή t_2 όπου η ταχύτητα του σημείου Α γίνεται η ελάχιστη δυνατή, η ταχύτητα του Β έχει μέτρο υ_2= 3,2m/s.

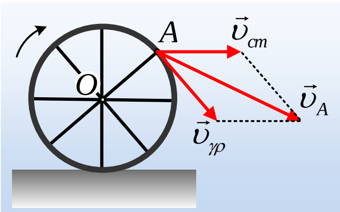
i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου Ο του τροχού.

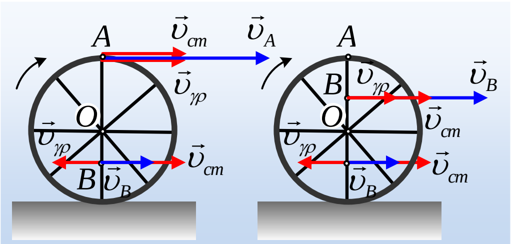
ii) Να βρεθεί η θέση του σημείου Β, καθώς και η απόσταση (ΑΒ) των δύο σημείων του τροχού.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας του σημείου Α, μεταξύ της στιγμής t_1 και μιας επόμενης χρονικής στιγμής που η ακτίνα ΟΑ γίνεται οριζόντια, για πρώτη φορά.

Απάντηση:

i) Θεωρούμε την κίνηση του τροχού ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του Ο, με γωνιακή ταχύτητα ω. Συνεπώς σε κάθε θέση η ταχύτητα του σημείου Α, θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα της υ_{cm} και της γραμμικής ταχύτητας λόγω της κυκλικής του κίνησης, γύρω από το Ο, με μέτρο $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$, όπως στο διπλανό σχήμα. Αφού ο τροχός κυλίεται για τα μέτρα των δύο αυτών ταχυτήτων ισχύει $\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$. Αλλά για να είναι μέγιστη η ταχύτητα του σημείου Α τη στιγμή t_1, θα πρέπει να βρεθεί στο ανώτερο σημείο, όπως στο δεύτερο σχήμα, όπου $\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=2\upsilon_{cm}$, αφού σε κάθε άλλη θέση, με βάση το σχήμα $\upsilon_A<\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}$ (τριγωνική ανισότητα).





Αφού το σημείο Β έχει ταχύτητα της ίδιας διεύθυνση με την ταχύτητα του σημείου Α, θα βρίσκεται στην ίδια διάμετρο με το σημείο Α, ή κάτω από το κέντρο (δεύτερο σχήμα) ή πάνω από το Ο (τρίτο σχήμα).

Εξάλλου το σημείο Α έχει ελάχιστη ταχύτητα $\upsilon_A=\upsilon_{cm}-\omega R=0$, τη στιγμή που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος. Αλλά στο 2^o σχήμα $\upsilon_B=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho/B}$, ενώ στο 3^o $\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho/B}$. Συνεπώς ταχύτητα μικρότερου μέτρου (0,8m/s) το σημείο Β έχει στο 2ο σχήμα, ενώ στο 3^o σχήμα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα (3,2m/s), πράγμα που σημαίνει ότι στο μεσαίο σχήμα, δείχνει τη θέση του Β, με το Α στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του και στο τελευταίο σχήμα τη θέση του όταν το Α έρθει σε επαφή με το έδαφος. Αλλά τότε για τις ταχύτητες του Β:

$$\upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho/B} = \upsilon_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho/B} = \upsilon_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, παίρνουμε $2\upsilon_{cm} = \upsilon_1 + \upsilon_2 \rightarrow$

$$\upsilon_{cm} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{0{,}8 + 3{,}2}{2} m/s = 2m/s$$

ii) Για την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού έχουμε:

$$\upsilon_{cm} = \omega R \rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{2}{0{,}5} rad/s = 4 rad/s$$

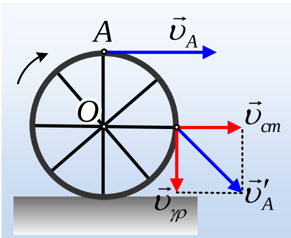
Ενώ από την (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho/B} = \upsilon_1 \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho/B} = \upsilon_{cm} - \upsilon_1 = 2m/s - 0{,}8m/s = 1{,}2m/s \text{, οπότε:}$$

$$\upsilon_{\gamma\rho/B} = \omega \cdot r \rightarrow r = \frac{\upsilon_{\gamma\rho/B}}{\omega} = \frac{1{,}2}{4} m = 0{,}3m = (OB)$$

Αλλά τότε $(AB) = R + r = 0{,}5m + 0{,}3m = 0{,}8m$.

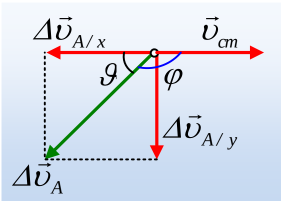
iii) Στο διπλανό σχήμα βλέπετε την ταχύτητα του σημείου Α, τη στιγμή που βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, μέτρου $\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \omega R = 2\upsilon_{cm} = 4m/s$, καθώς και τη στιγμή που η ακτίνα ΟΑ γίνεται οριζόντια, όπου η ταχύτητά του είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{\upsilon}'_A = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$.



Για τη μεταβολή λοιπόν της ταχύτητάς, μεταξύ των δύο αυτών θέσεων είναι:

$$\Delta\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}'_A - \vec{\upsilon}_A \begin{cases} \Delta\upsilon_{\alpha/x} = \upsilon'_{A/x} - \upsilon_{A/x} = \upsilon_{cm} - 2\upsilon_{cm} = -\upsilon_{cm} \\ \Delta\upsilon_{\alpha/y} = \upsilon'_{A/y} - \upsilon_{A/y} = \upsilon_{\gamma\rho} - 0 = \upsilon_{cm} \end{cases}$$

Αλλά τότε η μεταβολή της ταχύτητας του σημείου Α, με βάση το διπλανό σχήμα, έχει μέτρο:



$$\Delta\upsilon_A = \sqrt{(\Delta\upsilon_{A/x})^2 + (\Delta\upsilon_{A/y})^2} = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{cm}^2} \rightarrow$$

$$\Delta\upsilon_A = \upsilon_{cm}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} m/s$$

Ενώ η μεταβολή της ταχύτητας σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ=45° (διαγώνιος τετραγώνου) ή γωνία φ=θ+90°=135° με την ταχύτητα υ_{cm}.

dmargaris@gmail.com