Capítulo 10

INTRODUCCIÓN A LAS PROBABILIDADES

Sumario

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio del capítulo, el estudiante será capaz de:

1. Explicar el concepto de probabilidad y los distintos enfoques que prevalecen en su definición.
2. Indicar y utilizar las propiedades básicas de las probabilidades.
3. Realizar el cálculo de probabilidades para eventos simples y compuestos y para situaciones en las cuales se combinan varios eventos.
4. Resolver problemas simples de probabilidades.

Resumen

En este capítulo, se discute el concepto de probabilidad y se presentan los diferentes enfoques de la definición. Se explican sus propiedades básicas y los principios elementales para su cálculo: las leyes de la suma y del producto, y la probabilidad condicional.

10.1. INFERENCIA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

En los capítulos anteriores se estudiaron las técnicas de la estadística descriptiva, las cuales se refieren a la recolección de datos (cuestionarios, fuentes y técnicas); su clasificación y presentación (cuadros, gráficos, distribuciones de frecuencias) y su análisis (números relativos, medidas de posición y de variabilidad).

La *estadística descriptiva*, como su nombre lo indica, procura describir, en una forma objetiva y adecuada a las necesidades del interesado, el conjunto de datos por analizar. Las conclusiones o decisiones a las que se llegue son aplicables solo a esos datos, y no se pretende realizar inferencias o generalizaciones que vayan más allá del conjunto estudiado.

La otra faceta de la estadística trata de la realización de generalizaciones o inferencias acerca de una población con base en datos procedentes de muestras, y recibe el nombre de *inferencia estadística o estadística inferencial.* Cuando se ha realizado un censo y se dispone de información acerca de todos los elementos de la población, pueden cometerse errores al tomar una decisión. Estos se originan por fallas en los cálculos aritméticos, descuido, falta de juicio o criterio, etc.; pero no pueden ser de *inferencia,* ya que se tienen datos para todos los elementos. Cuando se trabaja con muestras, por el contrario, estos se usan para inferir la situación en la población y la precisión de ella depende de la medida en que *la muestra es representativa*. Es decir, la decisión se fundamenta en información parcial y se tomará en condiciones de incertidumbre, en consecuencia existe el riesgo de equivocarse al hacer la inferencia.

Un ejemplo de esta situación es cuando el distribuidor de bebidas gaseosas debe decidir si introduce un nuevo envase "gigante" en las zonas donde opera y que comprende alrededor de 700 mil viviendas. Obviamente, él no puede visitar a todas las familias de la zona para evaluar el grado de aceptación del producto, más bien debe contentarse con estudiar una muestra relativamente pequeña de amas de casa.[1] Con base en las repuestas, procederá a inferir o pronosticar la aceptación que tendrá este envase entre las aproximadamente 700 mil familias, las cuales conforman la población de su interés. A partir de esa inferencia –y de información fragmentaria de otro tipo– deberá decidir, finalmente, si sigue adelante con la idea o la desecha.

La decisión del distribuidor se da claramente en condición de incertidumbre acerca del nivel de aceptación del tipo "gigante" de envase –derivada del hecho de disponer solamente de información para una muestra– y lógicamente, puede incurrir en una mala decisión. No puede estar seguro de que su muestra sea representativa de la población total de amas de casa de la zona y, de manera consecuente, tampoco de determinar lo más adecuado con base en esa información. Solo puede aspirar a conseguir un alto grado de confianza o una probabilidad elevada de acertar.[2]

Resumiendo, nunca o casi nunca, el administrador, el ejecutivo o el investigador disponen de información completa para tomar sus decisiones. Por ello, la gran mayoría se toman en situaciones de incertidumbre y entrañan, por lo tanto, el riesgo de equivocarse. Esto hace surgir la necesidad de disponer de algún procedimiento objetivo que permita tratar con la incertidumbre y los riesgos. Esta función la cumple la *teoría de las probabilidades,* la cual se convierte en la base de la *estadística inferencial,* al suministrar los elementos para medir, analizar y minimizar los riesgos de error presentes en el proceso de inferencia.

En el estudio de las probabilidades y la inferencia estadística, tres problemas son importantes: a) el de la definición e interpretación; b) el de las reglas y principios para el cálculo de las probabilidades de eventos simples y compuestos; y c) el cálculo de valores numéricos en los problemas de inferencia estadística. Los dos primeros se estudiarán en este capítulo, el otro se abordará en los capítulos siguientes.

10.2. EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Aunque no esté en posición de dar una definición precisa del término, la gran mayoría de las personas tiene una noción intuitiva de lo que se entiende por probabilidad. Todos han tenido experiencias en las cuales interviene la incertidumbre asociada a las

1. La muestra es muy posible que esté entre 600 y 1000 familias. Esto le dará un error máximo de 3 y 4 puntos porcentuales para la proporción de personas que aceptan el envase con un nivel de confianza del 95%. Este tipo de problemas se abordan específicamente en el capítulo 12.
2. El nivel de aceptación del envase no es el único factor que entra en la decisión, además hay otros, pero aquí interesa destacar el componente estadístico y probabilístico envuelto en el proceso.

condiciones del tiempo o a la lotería y a otros juegos de azar. Además, la palabra probabilidad o algunas similares en su significado como posibilidad, eventualidad, contingencia, etc., se emplean frecuentemente en la vida diaria en relación con acontecimientos cuya verificación es incierta. Así, por ejemplo, se dice "es poco probable que llueva esta tarde", queriendo significar que se tiene bastante confianza en que el evento "llueva esta tarde" no suceda. Asimismo, se pueden hacer afirmaciones como "es casi seguro que el Deportivo Saprissa sea nuevamente campeón este año" o "es muy posible que los asaltantes del banco sean extranjeros". En este último ejemplo, a diferencia de los anteriores, el acontecimiento ya sucedió, pero al no tenerse información exacta sobre sus autores, se expresa una opinión sobre quiénes fueron y se indica el grado de confianza del que la emite con el término "muy posible".

Si se tiene la certeza absoluta de cómo suceden los hechos o las causas que los originan, no cabría hablar de probabilidad, ya que no existiría duda acerca de si, en una situación determinada, el hecho sucederá o no. A nadie se le ocurrirá dudar de que el sol saldrá mañana, y nadie esperará que brille aún a medianoche (al menos en el trópico). El primero es un evento o suceso cierto, se produce con toda seguridad; el segundo, un evento imposible. Las probabilidades se refieren a acontecimientos cuya ocurrencia es incierta, esto es, se sabe que pueden presentarse pero no es posible conocer con certeza cuándo.

La probabilidad es, en realidad, un valor numérico, debe cumplir con ciertas condiciones o propiedades matemáticas, se asocia a un evento o suceso determinado para expresar el grado de confianza que se tiene en su verificación futura de este. Así, cuando la posibilidad de lluvia durante el fin de semana es un 100%, hay seguridad de esto y, en consecuencia, quienes piensen salir al campo, por ejemplo, deben ir preparados para esa contingencia.

Para el desarrollo de una teoría de las probabilidades no se puede depender de nociones vagas o generales como las mencionadas, se requiere una definición precisa que sea posible emplear por todos con el mismo sentido. El establecerla y que llene de forma simultánea las ideas intuitivas, las necesidades empíricas y los requisitos matemáticos, sin embargo, no es tan simple como parece. Históricamente, se han presentado tres enfoques o definiciones: *la clásica, la frecuencial* y *la personalista,* a las cuales se hará referencia más adelante; ahora, la atención se dirigirá a la presentación de algunos términos necesarios para el desarrollo apropiado del cálculo de las probabilidades.

10.3. EVENTOS Y ESPACIO MUESTRAL

La estadística trabaja con datos que provienen de observaciones, experimentos o procesos repetitivos, reales o imaginarios. Así un estadístico o investigador puede anotar los pesos de niños recién nacidos, registrar las calificaciones de un curso de Biología General, analizar los datos sobre consumo semanal de leche de las familias visitadas en un estudio de mercado o imaginar lo que sucedería si lanza un dado "normal" 20 veces.[3]

Cuando se consideran este tipo de experiencias reiteradas, los resultados se denominan eventos o sucesos y conviene representarlos con algún símbolo; en este caso, se usarán las letras x o E.

Suponga que se tiene un grupo de 12 estudiantes con los siguientes pesos en kilogramos:

$$51, 54, 57, 58, 58, 58, 59, 60, 66, 66, 74, 81.$$

Si se escogen estudiantes al azar de ese grupo, cada peso obtenido representa una observación o un evento simple y, como puede notar, algunos de ellos muestran el mismo resultado: el peso 58 se repite tres veces y el 66, dos.

Si se está interesado en el número de estudiantes que pesan más de 60 kg, el resultado $x > 60$ kg constituiría un evento compuesto formado por los pesos mayores de 60 kg: 66, 66, 74, 81. Estos cuatro constituyen un subconjunto del conjunto de los 12 valores observados.

Gráficamente, los valores pueden representarse como puntos sobre una línea horizontal:

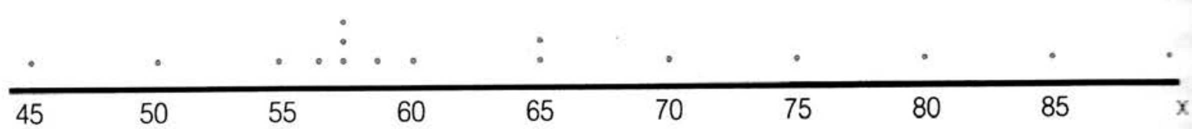


Figura 10.1. Representación del peso de estudiantes sobre una línea horizontal

Considere, como otra ilustración, los resultados obtenidos al lanzar un dado normal. Los valores posibles son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, y pueden representarse sobre una línea:

3. El término "normal" se usa para contraponerlo a un dado "defectuoso" o falso que ha sido "cargado" para favorecer la aparición más frecuente de una cara determinada.

Figura 10.2. Representación sobre una línea de los resultados obtenidos al lanzar un dado normal

Cada punto representa un evento simple, y el total de todos los posibles eventos simples, o sea el espacio muestral de la experiencia. Un evento compuesto sería el resultado "número par", el cual estaría formado por el subconjunto de resultados 2, 4 y 6.

Como ilustración final, considere el caso en que se lanzan dos dados normales, uno azul y otro rojo, pero iguales en sus otras características.

El dado azul puede mostrar cualquier número entre 1 y 6, lo mismo sucede con el rojo, y como el resultado de uno se puede combinar con cualquiera de los seis del otro, los resultados posibles al lanzar los dados son 36. Es decir, el espacio muestral de la experiencia estará formado por 36 eventos simples.

$$(1,1); (1,2);.....;(1,6); (2,1); (2,2); (2,3);.....;(2,6); \text{etcétera.}$$

En el gráfico de la figura 10.3 se presenta el espacio muestral. En el eje x (horizontal), se indica el resultado para el dado rojo, en el y (vertical) el resultado para el azul.

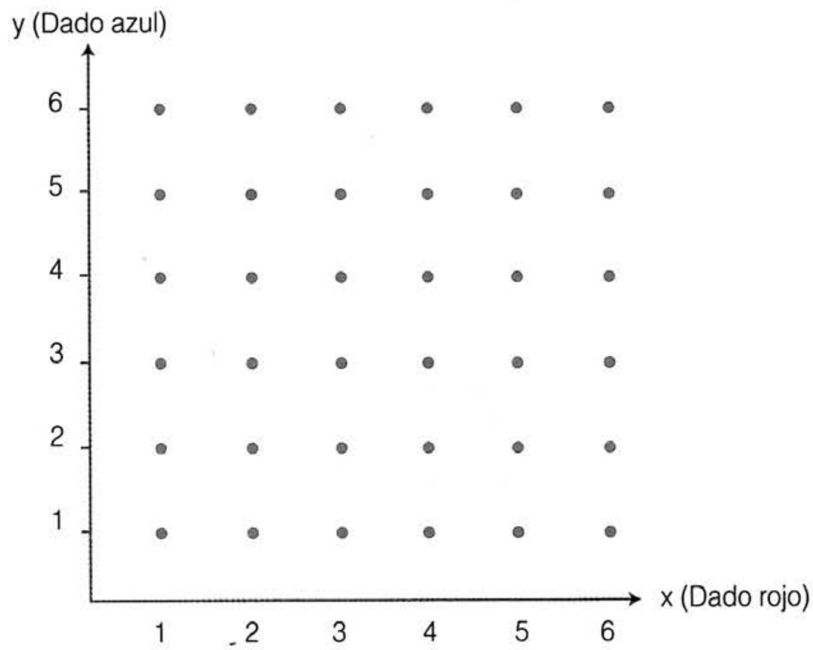


Figura 10.3. Gráfico del espacio muestral del lanzamiento de dos dados

Cada uno de los puntos representa un evento simple y, combinándolos de acuerdo con algún criterio, se pueden obtener diferentes eventos compuestos.

Suponga que interesa la suma de los valores mostrados por ambos dados, es decir, eventos compuestos en relación con la suma $x + y$.

a) $x + y = 8$.

Este evento compuesto lo forman cinco eventos simples:

$(x = 2, y = 6)$; $(x = 3, y = 5)$; $(x = 4, y = 4)$; $(x = 5, y = 3)$; $(x = 6, y = 2)$.

Este subconjunto ha sido marcado, en el gráfico 10.2, como un área sombreada.

b) $x + y =$ número par .

Dieciséis puntos forman el subconjunto que corresponde a este evento compuesto. En el gráfico de la figura 10.4 aparece cada uno de ellos encerrado en un círculo.

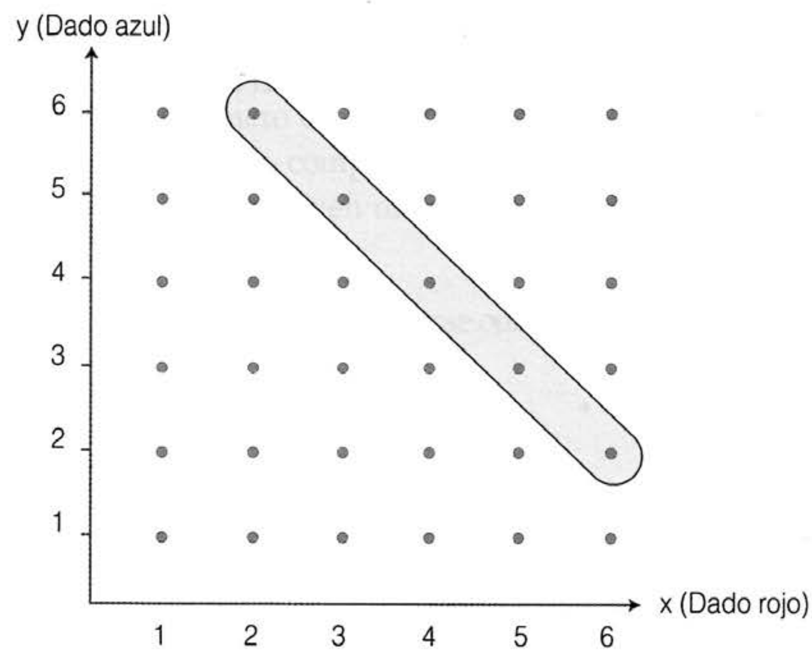


Figura 10.4. Gráfico que muestra el evento compuesto formado por cinco eventos simples

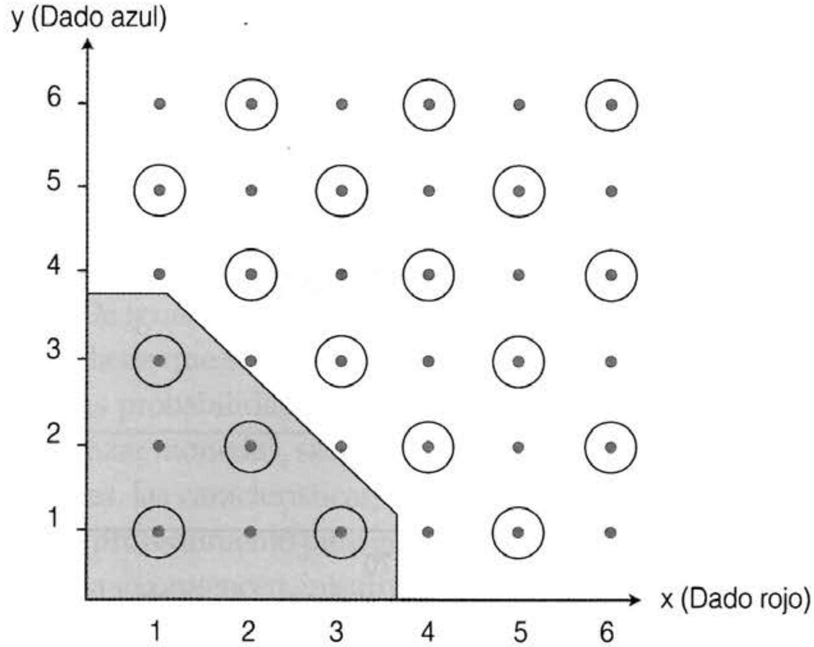


Figura 10.5. Gráfico del evento compuesto formado por dieciséis puntos encerrado en un círculo

c) $x + y < 5$.

Seis puntos forman el subconjunto correspondiente a este evento compuesto (suma menos que cinco). En el gráfico de la figura 10.5, son todos los puntos que se encuentran dentro del área sombreada afuera y adentro de los círculos.

d) $x + y$ = número par menor que 5.

Como puede notarse, este evento compuesto está formado por los 4 puntos que cumplen simultáneamente con ambas condiciones: "número par" y "menor que cinco", y son (3,1); (2,2); (1,3) y (1,1). En el lenguaje de la teoría de conjuntos, estos constituyen la *intersección* de los conjuntos definidos para el caso b) y c); en el gráfico de la figura 10.5 son los puntos que están encerrados en un círculo y, además, se hallan en el área sombreada.

Se han comentado ejemplos de espacios muestrales para variables discretas y se mencionó uno para una variable continua: peso de estudiantes. Ahora, se comentará brevemente uno de espacio muestral bidimensional para variables continuas.

Sea x el peso en kilogramos y y la estatura en centímetros para estudiantes universitarios; suponga que no hay alumnos con un peso menor de 45 kg ni más de 95 kg y, respecto a la estatura, no hay ninguno de menos de 155 cm ni mayor de 190, es decir:

$$45 \leq x \leq 95,$$
$$155 \leq y \leq 190.$$

El espacio muestral lo da el rectángulo *ABCD* que aparece en el gráfico de la figura 10.6.

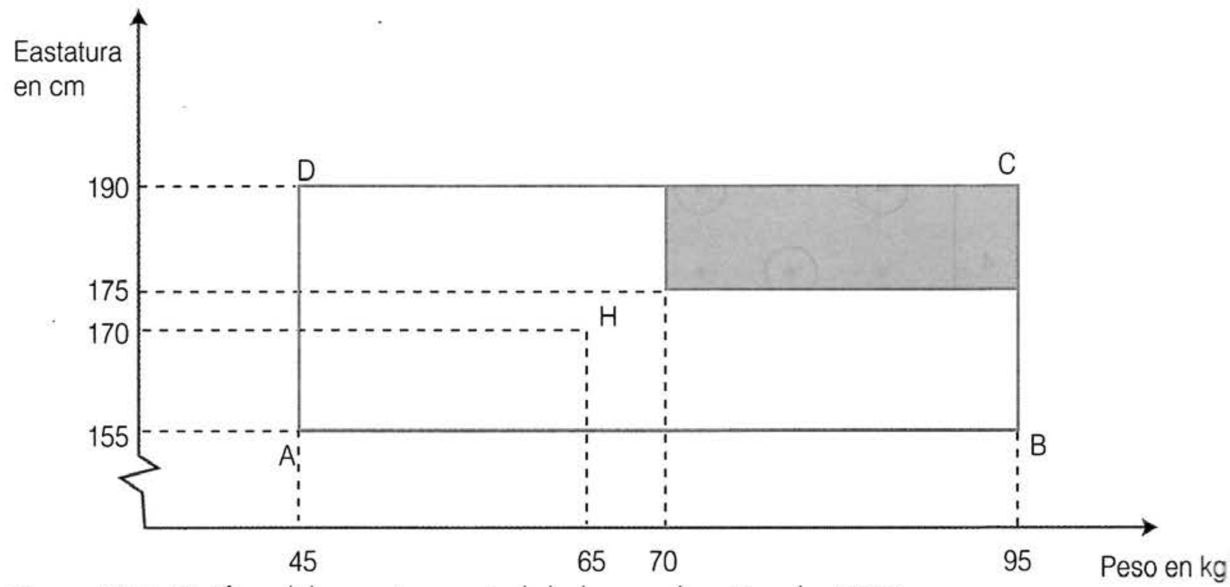


Figura 10.6. Gráfico del espacio muestral dado por el rectángulo *ABCD*

Un evento simple lo constituiría, por ejemplo, el caso de un estudiante que pese 65 kg y mida 170 cm (punto H, $x = 65$; $y = 170$, ver el gráfico 10.4)

Un evento compuesto sería el resultado "estudiante que pese más de 70 kg y mida más de 175 cm" (ver zona rayada en el gráfico de la figura 10.6).

10.4. LA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD. ENFOQUE CLÁSICO

¿Cómo asignar probabilidades a los eventos de una experiencia aleatoria? En primer lugar, se tiene que pensar en términos de un experimento ideal, que pueda repetirse un gran número de veces en "condiciones similares". Es obvio que las circunstancias cambian en la realidad, pero se debe suponer que no varían. Así ocurre en el caso del lanzamiento de una moneda, al igual que si se trata de un experimento diseñado para medir el efecto de una nueva dieta en la producción de leche de las vacas. Luego, se anticipan todos los resultados posibles, o sea, el espacio muestral de la experiencia. En este escenario, ¿cómo se asignan las probabilidades a los diferentes eventos o resultados de la experiencia?

Como ya se ha indicado, se plantean y utilizan varios enfoques en la asignación de las probabilidades a los eventos. Se inicia con el más simple y antiguo.

Considere el espacio muestral que cubre los resultados posibles al lanzar un dado: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

¿Cuál es la probabilidad que corresponde a cada uno de los puntos muestrales: 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Intuitivamente, se concluye que la probabilidad correspondiente a cada uno de los puntos es la misma e igual a $\frac{1}{6}$, ya que, siendo el dado simétrico, todas sus caras tienen idéntica oportunidad de quedar hacia arriba y, por lo tanto, la posibilidad de que una de ellas esté en esa posición será el cociente entre 1 y 6.

Es decir, por simple razonamiento, partiendo del supuesto de que el dado es perfecto, puede calcularse la probabilidad asignable a cada uno de los eventos simples que forman el espacio muestral. De igual manera se obtiene la posibilidad para un cierto evento compuesto, *por ejemplo, la de que el número obtenido al lanzar el dado sea par:* $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; *y así,* se pueden calcular las probabilidades asignables a los puntos del espacio muestral para experiencias como lanzar monedas, sacar cartas de un juego de naipes, hacer girar una ruleta, etc. En todas estas, *las características físicas de los objetos utilizados* (moneda, carta, ruleta) al igual que el procedimiento para generar los resultados, le dan al proceso una clara naturaleza aleatoria y convencen, intuitivamente, de que todos los resultados o eventos simples tienen la misma oportunidad de suceder, o sea, son "igualmente posibles".

Esta forma de razonamiento es la más antigua y dio origen a lo que se denomina *definición clásica* de probabilidad, usada por Pascal, Fermat y Laplace. Este enfoque proviene *directamente de la experiencia con los juegos de azar; supone que el espacio muestral* es finito, la variable es discreta y los resultados, *mutuamente excluyentes e igualmente posibles*. Se define en los siguientes términos:

Si un suceso puede ocurrir de n maneras mutuamente excluyentes e igualmente posibles, y si $n(A)$ de ellas posee un atributo A, la probabilidad de A es la fracción $P(A) = \frac{n(A)}{n}$.

Corrientemente, esto mismo se expresa diciendo que la probabilidad de ocurrencia del evento A viene dada por el cociente de los casos favorables en los cuales suceda dicho evento A entre los posibles, o sea:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}.$$

Es conveniente dejar claro el significado de las expresiones "mutuamente excluyentes" e "igualmente posibles".

Dos eventos son mutuamente excluyentes cuando no suceden en forma simultánea. Por ejemplo, si se lanza una moneda, los eventos escudo y corona[4] son mutuamente excluyentes: si esta cae mostrando escudo es imposible que, al mismo tiempo, muestre corona. Por el contrario, si se extrae una carta de una baraja, los eventos "número nueve" y "oros" no son mutuamente excluyentes, ya que podrían suceder simultáneamente si la carta extraída resultara ser, por ejemplo, el nueve de oros.

4. El anverso y el reverso de una moneda reciben en Costa Rica las denominaciones de escudo y corona, respectivamente, que en otros países corresponden de habla hispana a cara y cruz, cara y sello.

De la misma forma, para que la definición clásica de probabilidad pueda aplicarse, es necesario, también, que todos los casos posibles tengan la misma oportunidad de suceder, es decir, sean igualmente posibles; de no ser así, la definición conduciría a resultados incorrectos. Para aclarar este punto, considere una experiencia consistente en lanzar al aire dos monedas. Si se presta atención al número de escudos, se encuentra que tres resultados son posibles: dos escudos, un escudo o ningún escudo.

Razonando a la ligera, podría decirse que la probabilidad de obtener dos escudos es de un tercio, ya que hay tres casos posibles y uno de ellos es favorable al evento considerado, es decir:

$$P(2 \text{ escudos}) = \frac{1}{3}.$$

Sin embargo, este resultado es incorrecto, ya que los números de escudos posibles (0, 1 y 2) no son eventos igualmente viables. Es más, si se construye y analiza el espacio muestral de la experiencia usando un *diagrama de árbol*, puede notarse que los eventos igualmente probables son cuatro:

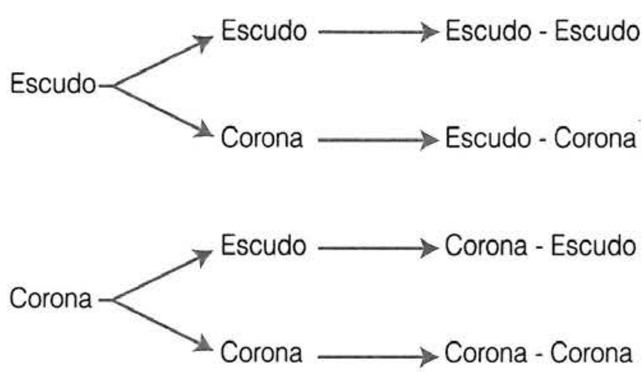


FIGURA 10.7. Gráfico que muestra el diagrama de árbol de la experiencia de lanzar dos monedas

Moneda A	Moneda B
Escudo	Escudo
Escudo	Corona
Corona	Escudo
Corona	Corona

De estos eventos igualmente posibles, hay uno con la característica que interesa, escudo-escudo, por lo tanto la probabilidad correcta viene dada por:

$$P(2 \text{ escudos}) = \frac{3}{4}$$

La definición clásica de probabilidades no requiere la ayuda de la experiencia. Para la determinación de los casos posibles y de los favorables se sigue un proceso de razonamiento deductivo, basado en las propiedades geométricas del objeto o en las características del procedimiento considerado.

10.5. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS PROBABILIDADES

Resulta conveniente hacer referencia a las propiedades matemáticas básicas que cumplen las probabilidades. Se utilizará E_i para indicar el **evento simple** o **el punto muestral** ***i***.

1. La probabilidad es un número o cantidad positiva o nula: $P(E_1) \geq 0$.
2. La suma de las probabilidades correspondientes a cada uno de los eventos simples, que constituyen el espacio muestral, es igual a la unidad: $P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1$, donde el total de puntos en el espacio muestral es n.
3. Si un evento compuesto A abarca los eventos simples $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$, su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples:

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots P(E_k).$$

De las anteriores propiedades resulta, a su vez, que la probabilidad de un evento es siempre un número positivo o nulo. Sin embargo, no puede ser mayor de uno, porque el numerador del cociente que define la probabilidad no debe ser mayor que el denominador. En otras palabras, el número de casos favorables nunca puede ser mayor que el de posibles y, por lo tanto,

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Cuando el evento A es imposible, es decir, que no puede suceder, entonces:

$$P(A) = 0.$$

Si el evento A es seguro o cierto, o sea, necesariamente tiene que producirse, entonces:

$$P(A) = 1.$$

Para ilustrar las propiedades considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Se lanza un dado.

Compruebe que la probabilidad total es igual a uno.

$$P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Calcule la probabilidad para $x < 4$.

$$P(x4) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2

Se lanzan dos dados perfectos, uno de color rojo (x) y otro azul (y), y se toma la suma de puntos $(x + y)$.

El espacio muestral de esta experiencia se obtuvo con ayuda del gráfico de la figura 10.3 de este capítulo. Lo constituyen 36 eventos simples, cada uno con una probabilidad de $\frac{1}{36}$.

Con ayuda de ese espacio muestral se calcularán varias probabilidades.

a) Probabilidad de que $x + y = 8$.

Se trata de la probabilidad de un evento compuesto formado por los eventos simples: (2,6); (3,5); (4,4); (5,3) y (6,2).

De acuerdo con la propiedad (3), indicada anteriormente, la probabilidad de este evento compuesto se obtiene sumando las de los eventos simples.

$$P(x + y = 8) = P(2,6) + P(3,5) + P(4,4) + P(5,3) + P(2,6)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

También pueden resolverse utilizando la definición clásica, ya que todos los puntos son igualmente posibles.

$$P(x + y = 8) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{5}{36} \text{ (Ver figura 10.2).}$$

b) Probabilidad de que $x + y = 5$.

$$P(x + y = 5) = \frac{6}{36} \text{ (Ver figura 10.3).}$$

c) Probabilidad de que $x + y =$ número par

$$P(x + y = \textbf{número par}) = \frac{18}{36} \text{ (Ver figura 10.3).}$$

d) Probabilidad de que $x + y =$ número par menor que cinco

$$P(x + y = \textbf{número par menor que } 5) = \frac{4}{36} \text{ (Ver figura 10.3).}$$

◇◇◇

10.6. LA LEY DE LA SUMA

Si se tienen dos eventos A y B, la probabilidad de que suceda *por lo menos uno de ellos* es igual a la de que suceda A más la de que suceda B; menos la probabilidad de que sucedan A y B, simultáneamente.

En símbolos: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ en donde:

P(A o B) = Probabilidad de que suceda el evento A o el evento B o ambos.

P(A) = Probabilidad de que suceda el evento A.

P(B) = Probabilidad de que suceda el evento B.

P(AB) = Probabilidad de que sucedan simultáneamente A y B.

Observando el gráfico de la figura 10.8, puede notarse claramente por qué debe ser restada la probabilidad conjunta *P(AB)*.

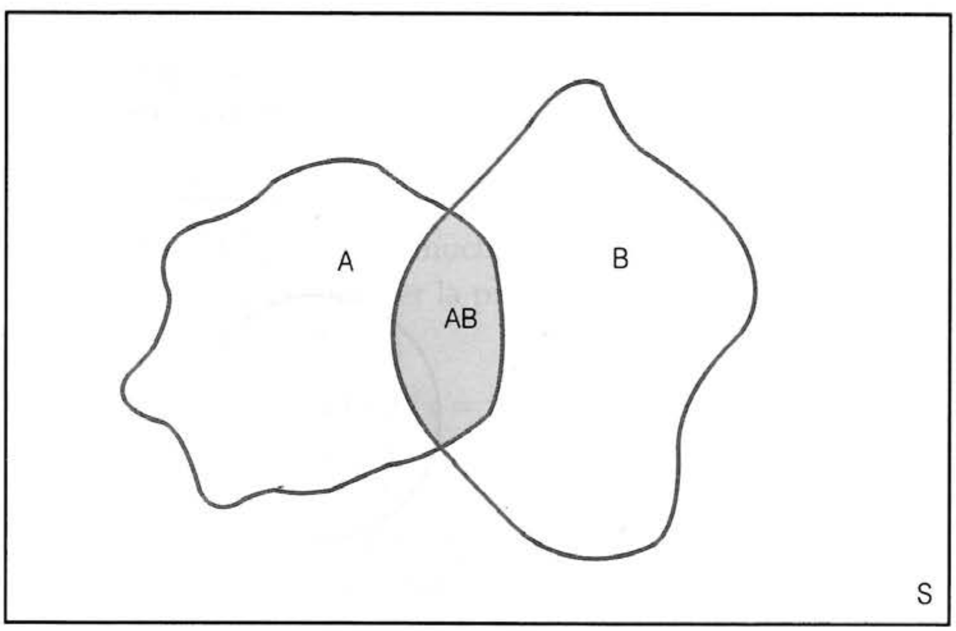


Figura 10.8. Gráfico de la probabilidad conjunta P(*AB*)

Cada punto muestral tiene asociada una probabilidad. Al sumarse *P(A)* y *P(B)*, se están considerando dos veces los puntos con las características A y B, es decir, los pertenecientes al evento AB (intersección de los conjuntos A y B); es necesario, entonces, hacer la deducción correspondiente.

Como ilustración de la ley de la suma, considere el ejemplo ya comentado de los dos dados.

Sean: Evento A: $x + y$ = número impar. Evento B: $x + y =< 5$ (menor que 5).

¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar los dos dados, la suma $x + y$ sea un número par o menor de 5? Aplicando la regla de la suma se obtiene:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{18}{36} + \frac{6}{36} - \frac{4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Note que el evento B, suma menor que 5, lo componen 6 eventos simples: (3,1); (2,2); (1,3); (2,1); (1,2) y (1,1); de los cuales hay cuatro con la característica de producir una suma par.

Esos cuatro son incluidos cuando se calcula la probabilidad $P(A) + P(B)$ y la probabilidad *P(B)*; por ello, en $P(A) + P(B)$ son contados dos veces y, consecuentemente, deben ser restados una vez, a esto se debe que se deduzca $\frac{4}{36}$ correspondiente a esos cuatro puntos muestrales que tienen simultáneamente los atributos A y B.

Si los eventos A y B son *mutuamente excluyentes* $P(AB) = O$, ya que no hay puntos muestrales con las características A y B, simultáneamente, la fórmula para la ley de la suma se reduce a:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B).$$

Esta situación se ilustra en el gráfico de la figura 10.9, se aprecia que los conjuntos A y B no tienen una zona común, es decir, no poseen intersección o es vacía.

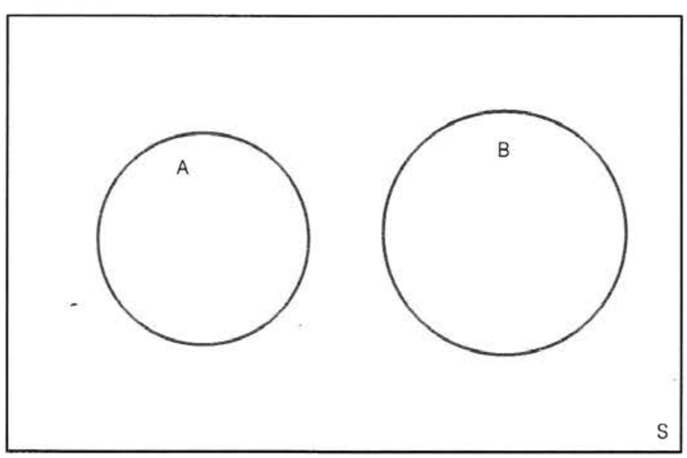


Figura 10.9. Gráfico que muestra dos eventos mutuamente excluyentes

Ejemplo 1

Se lanza un dado, ¿cuál será la probabilidad de obtener 3 o 5?

Evento A: obtener 3

Evento B: obtener 5

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La ley de la suma puede generalizarse a más de dos eventos. Así, para tres eventos adopta la siguiente expresión general:

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) + P(ABC).$$

Si los eventos en cuestión A, B y C son mutuamente independientes, la fórmula se reduce a

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

◇◇◇

10.6.1. El evento contrario

Conviene hacer referencia al evento contrario o complemento de un evento A, que se designa como $\overline{A}$ y lo forman todos los eventos simples que no tienen el atributo A. Así, por ejemplo, si la experiencia consiste en lanzar un dado, y se designa con A el resultado menor o igual a 5, el evento contrario lo formaría el simple número igual a 6.

Como la suma de las probabilidades de todos los eventos simples es la unidad, entonces se tiene que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y entonces } P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Esta propiedad es muy útil, ya que en muchos casos es más cómodo calcular el evento contrario, restarlo de uno y así obtener la probabilidad del evento de interés A. En el ejemplo 1:

$$P(A) = P(x \leq 5) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Un método más conveniente sería calcular primero la probabilidad del evento contrario, o sea $P(x = 6)$, y luego restarlo de 1. Así:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(x = 6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

10.7. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Por probabilidad condicional se entiende la posibilidad de que un cierto evento suceda, pues otro ya ocurrió. Suponga que se lanzan dos dados corrientes y la suma de sus caras resultó par, y ahora se desea saber la probabilidad de que sea menor que 5. Aquí se tiene un evento A: suma par, y otro B: suma menor que 5, interesa la probabilidad condicional de B dado A, la cual se indica por la expresión $P(B/A)$, donde el símbolo (/) indica la condición. Esta expresión se lee "probabilidad de B dado que A ha ocurrido".

En este caso, al saber que la suma resultó par, el espacio muestral de interés se reduce a 18 puntos –aparecen en el gráfico de la figura 10.3 rodeados por un círculo– y hace falta determinar cuáles producen una suma menor que 5. Un examen del gráfico de la figura 10.3 muestra que son 4: (1,3), (1,1) (2,2) y (3,1). Por consiguiente, la probabilidad condicional deseada resulta $P(A/B)=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$.

En lugar de usar directamente el cociente de los puntos muestrales para el cálculo, lo cual es totalmente correcto, también puede utilizarse la fórmula de la probabilidad condicional, la cual viene dada por la expresión siguiente:

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Donde $P(AB)$ es la probabilidad de que sucedan simultáneamente A y B, y $P(A)$ de A.

Los valores para el ejemplo son $\frac{4}{36}$ y $\frac{18}{36}$, respectivamente; al aplicarse la fórmula, se obtiene el mismo resultado alcanzado al emplear el conteo de los puntos muestrales:

$$P(B/A)=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{18}{36}}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}.$$

Si se revisa el gráfico de la figura 10.5, es posible notar que en el cálculo de la probabilidad condicional, solo participan los puntos muestrales del conjunto A; los cuales para calcular la probabilidad, se dividen los puntos con la condición A y B (área rayada) entre el total que están en A.

10.8. LA REGLA DEL PRODUCTO

Si los resultados de un suceso aleatorio pueden tener, a la vez, los atributos A y B, la probabilidad de ocurrencia de ambos es igual a la de que suceda A multiplicada por la probabilidad de que suceda B, dado que pasó A.

Esta regla del producto de probabilidades se expresa simbólicamente en la forma siguiente:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Donde $P(A)$ representa la probabilidad del evento A y $P(B/A)$, la probabilidad condicional de B, la cual se definió en el párrafo anterior. Conviene señalar que la expresión $P(AB) = P(B)\,P(A/B)$ es equivalente a la precedente.

10.8.1. Eventos mutuamente independientes

Si la ocurrencia de A no afecta la de B o viceversa, entonces se dice que los eventos A y B son mutuamente independientes y se tiene que:

$$P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B).$$

Bajo esta condición de independencia entre A y B, la fórmula del producto se convierte en:

$$P(BA) = P(A)P(B).$$

Como ilustración, considere el caso de una urna que contiene 7 bolas blancas y 5 negras, siendo iguales en todo, excepto en su color. Se saca una al azar y luego otra, sin haber reemplazado la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda negra?

Sea B el evento bola blanca y N el bola negra e interesa $P(BN)$, además, la probabilidad de bola negra se afecta porque la blanca seleccionada se deja fuera de la urna. De acuerdo con la regla del producto $P(BN)$, bajo estas condiciones, es:

$$P(BN) = P(B)P(N/B).$$

Ahora bien, dado que hay 7 bolas blancas entre las 12 de la urna y todas tienen la misma oportunidad de ser seleccionadas, $P(B) = \frac{7}{12}$. En cuanto a la probabilidad de bola negra en la segunda extracción es $P(N/B) = \frac{5}{11}$, ya que la cantidad dentro de la urna disminuyó a 11 al no reemplazarse la bola blanca extraída. Al realizar el cálculo se obtiene:

$$P(BN) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}.$$

En el caso de la situación anterior, si la bola extraída es devuelta a la urna antes de la segunda vez, los eventos son independientes, y la probabilidad de obtener una bola negra y blanca se mantienen constantes y entonces:

$$P(BN) = P(B) \cdot P(N) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{35}{144}.$$

La ley del producto también se puede generalizar a más de dos eventos, por ejemplo, para el caso de cuatro: A, B, C y D.

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC).$$

Si los eventos son mutuamente independientes la fórmula se reduce a:

$$P(ABCD) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D).$$

Para ilustrarla, considere el caso de una urna que contiene 5 bolas negras, 4 blancas y 3 verdes. Se quiere calcular la probabilidad de que, al extraer 3 bolas al azar, estas sean 1 blanca, 1 verde y 1 negra, en ese orden. La experiencia se hará sin reemplazo.

$$P(BVN) = P(B) \cdot P(V/B) \cdot P(N/BV).$$

$$P(B) = \frac{4}{12}, \quad P(V/B) = \frac{3}{11}, \quad P(N/BV) = \frac{5}{10}.$$

$$P(BVN) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}.$$

Si se repitiera el experimento anterior, pero con reemplazo de las bolas seleccionadas antes de la siguiente extracción, se tendría;

$$P(BVN) = P(B) \cdot P(V) \cdot P(N).$$

$$P(B) = \frac{4}{12}, \quad P(V) = \frac{3}{12}, \quad P(N) = \frac{5}{12}.$$

$$P(BVN) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{60}{1728} = \frac{5}{144}.$$

Las reglas de la suma y del producto, y algunos otros conceptos discutidos en el capítulo, se resumen seguidamente para el caso de dos eventos:

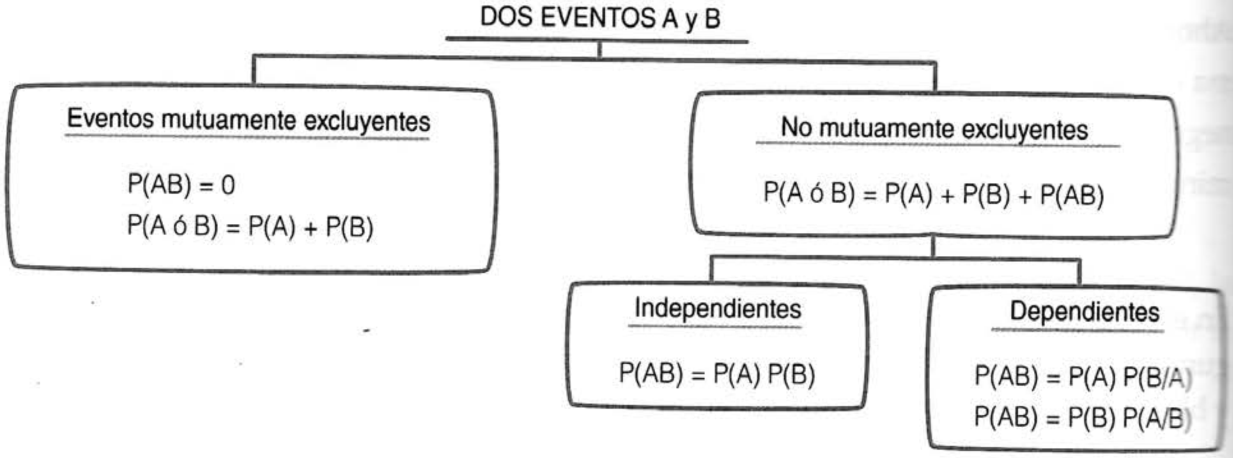


Figura 10.10. Clasificación de diversos tipos de eventos y reglas de probabilidad que se utilizan

10.9. PROBABILIDAD ESTADÍSTICA O FRECUENCIAL Y PERSONALISTA

Las probabilidades calculadas con la definición clásica se conocen como *a priori*. Cuando se dice que la probabilidad de obtener un escudo al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$, se llega a ese valor por un razonamiento totalmente deductivo. El cálculo no requiere lanzar la moneda, ni siquiera tenerla; simplemente, si la moneda es perfecta, la probabilidad es un medio, pero no se dice nada acerca de cómo determinar si lo es.

Note que se trabaja con objetos ideales, como monedas y dados perfectos, o con procesos que funcionan bajo condiciones prototípicas. Esto, sin embargo, no debe preocupar, porque es común a los sistemas matemáticos; en la geometría, por ejemplo, se trabaja con círculos perfectos y línea de anchura cero.

El problema es que el enfoque basado en la definición clásica de la probabilidad tiene limitaciones muy serias, las cuales impiden, en casi todas las situaciones prácticas, el cálculo de la probabilidad de un evento mediante el cociente de casos favorables sobre casos posibles.

10.9.1. Limitaciones de la definición clásica

Estas dificultades fueron evidentes desde que se dieron los primeros pasos en el desarrollo de la teoría de las probabilidades. Las situaciones más comunes, en las cuales no es aplicable la definición clásica, son las siguientes:

a) El número de casos favorables, y aún el de posibles, es desconocido. En esta situación resulta imposible calcular el cociente y, por lo tanto, no puede lograrse un valor para la probabilidad del evento que interesa.

b) El total de resultados posibles es infinito.

c) Se sabe que los eventos no son igualmente posibles o, por lo menos, no se está seguro de que lo sean. Esta es una situación muy corriente en la práctica, para la cual la definición clásica resulta inútil.

Un ejemplo lo proporciona un dado corriente, con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en sus caras, pero que ha sido alterado ("cargado") para favorecer una de ellas. Si el dado estuviera perfectamente equilibrado, la definición clásica nos indica que la probabilidad de obtener cualquiera de los números es $\frac{1}{6}$; sin embargo, como está "cargado", los resultados no son igualmente posibles y la definición clásica no puede aplicarse.

Las limitaciones mencionadas hacen que una teoría de probabilidades, basada en la definición clásica, resulte de muy poca utilidad en la mayoría de los campos de aplicación

10.9. PROBABILIDAD ESTADÍSTICA O FRECUENCIAL Y PERSONALISTA

Las probabilidades calculadas con la definición clásica se conocen como *a priori*. Cuando se dice que la probabilidad de obtener un escudo al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$, se llega a ese valor por un razonamiento totalmente deductivo. El cálculo no requiere lanzar la moneda, ni siquiera tenerla; simplemente, si la moneda es perfecta, la probabilidad es un medio, pero no se dice nada acerca de cómo determinar si lo es.

Note que se trabaja con objetos ideales, como monedas y dados perfectos, o con procesos que funcionan bajo condiciones prototípicas. Esto, sin embargo, no debe preocupar, porque es común a los sistemas matemáticos; en la geometría, por ejemplo, se trabaja con círculos perfectos y línea de anchura cero.

El problema es que el enfoque basado en la definición clásica de la probabilidad tiene limitaciones muy serias, las cuales impiden, en casi todas las situaciones prácticas, el cálculo de la probabilidad de un evento mediante el cociente de casos favorables sobre casos posibles.

10.9.1. Limitaciones de la definición clásica

Estas dificultades fueron evidentes desde que se dieron los primeros pasos en el desarrollo de la teoría de las probabilidades. Las situaciones más comunes, en las cuales no es aplicable la definición clásica, son las siguientes:

a) El número de casos favorables, y aún el de posibles, es desconocido. En esta situación resulta imposible calcular el cociente y, por lo tanto, no puede lograrse un valor para la probabilidad del evento que interesa.

b) El total de resultados posibles es infinito.

c) Se sabe que los eventos no son igualmente posibles o, por lo menos, no se está seguro de que lo sean. Esta es una situación muy corriente en la práctica, para la cual la definición clásica resulta inútil.

Un ejemplo lo proporciona un dado corriente, con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en sus caras, pero que ha sido alterado ("cargado") para favorecer una de ellas. Si el dado estuviera perfectamente equilibrado, la definición clásica nos indica que la probabilidad de obtener cualquiera de los números es $\frac{1}{6}$; sin embargo, como está "cargado", los resultados no son igualmente posibles y la definición clásica no puede aplicarse.

Las limitaciones mencionadas hacen que una teoría de probabilidades, basada en la definición clásica, resulte de muy poca utilidad en la mayoría de los campos de aplicación de la estadística; por ello, buscando una definición más general que satisfaga las necesidades teóricas y prácticas, se han propuesto otras formas para definir la probabilidad. Entre ellas, se encuentra el enfoque frecuencial o estadístico, toma en cuenta los resultados obtenidos en la experiencia, que es de donde nacen, en esencia, todas las definiciones de probabilidad, inclusive la "clásica" ya comentada.

10.9.2. Enfoque estadístico o frecuencial

El enfoque estadístico o frecuencial se basa en los resultados empíricos y por ello, antes de discutir la definición estadística de probabilidad, es necesario revisar el concepto de frecuencia relativa, ya mencionado en el capítulo de distribuciones de frecuencia.

Si se hace un número n de observaciones de una misma clase y se encuentra que el evento A ocurre en $n(A)$ de ellas, el cociente $\frac{n(A)}{n}$ se denomina frecuencia relativa del evento A.

$$f(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Como ilustración, considere un experimento en el cual se inoculan 20 ratas con una disolución tóxica, el evento que interesa anotar es la muerte o supervivencia de cada una. Si de las 20 ratas inoculadas, 14 mueren, el cociente $\frac{14}{20} = 0,70$ constituye la frecuencia relativa del evento "muerte de la rata". El investigador diría entonces que un 70% de las ratas inoculadas murieron.

Si la experiencia anterior se repite, es decir, si se toman otras muestras de 20 ratas, se inoculan y se calcula la frecuencia relativa del evento "muerte de la rata", podrá notarse que las frecuencias relativas no son iguales sino que muestran fluctuaciones, aunque la gran mayoría tiende a concentrarse alrededor de un cierto valor.

Las fluctuaciones de las frecuencias relativas, en muestras sucesivas, se pueden reducir si se aumenta el número de observaciones. Es natural que, cuanto mayor sea la cantidad considerada, menores serán las diferencias entre muestras sucesivas, y más concentrados los valores observados. En el ejemplo considerado, si en lugar de tomarse muestras de 20 ratas, se utilizan muestras de 100, la proporción de las muertas variará mucho menos de una experiencia a otra.

Esta circunstancia, de que conforme sea mayor el número de observaciones así es la estabilidad de las frecuencias relativas, ha llevado a que los estadísticos conciban la probabilidad como un valor cierto, generalmente desconocido, al cual tiende, como límite, la frecuencia relativa de una cierta experiencia al aumentar n.

En símbolos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n} = \lim_{n\to\infty} f(A) = P(A).$$

Para el ejemplo de la disolución tóxica aplicada a las ratas, $P(A)$ será el límite al que tendería la frecuencia relativa cuando el número investigado aumente sostenidamente. Parece natural, por ejemplo, que un resultado basado en una muestra de 100 ratas sea más confiable, como estimación de $P(A)$, que una frecuencia relativa fundamentada únicamente en 20 observaciones, y que aún lo sea más una proporción basada en 1000.

En una gran cantidad de campos, esta forma de abordar el problema de la definición de probabilidad resulta muy natural y apropiado, tal es el caso de la investigación biológica y médica, los seguros, la demografía, la producción industrial, entre otras.

10.9.3. El enfoque personalista o subjetivo

La definición estadística de probabilidad tiene sus limitaciones y también sus críticas; por ejemplo, se ha indicado que gran cantidad de eventos no son repetibles en condiciones ni siquiera esencialmente iguales (experimentos agrícolas) y otros son únicos y en forma alguna pueden considerarse reiterables.

Esto ha llevado al desarrollo de un enfoque denominado *probabilidad personalista o subjetiva,* el cual se orienta a tratar el caso de eventos históricos o específicos que no pueden repetirse y, por ello, no es dable aplicarles la definición clásica ni emplear la interpretación frecuencial.

La escuela personalista concibe la probabilidad como una medida de la creencia personal de que un cierto evento particular es susceptible de suceder o ha sucedido. Por ejemplo, un detective puede indicar que, en su opinión, la posibilidad de que el asalto a un cierto banco haya sido realizado por una banda de delincuentes extranjeros es 0,80. Otro ejemplo es el del cafetalero, quien estima que 0,40 es la probabilidad de alza sostenida del precio del saco de café durante los próximos cinco años. En ambos casos, no es posible estimarlas utilizando el enfoque frecuencial, sin embargo, contar con una probabilidad de estos hechos es muy importante, tanto para el cafetalero como para el detective, y el enfoque personalista resulta, entonces, muy útil.

Un punto interesante es que este planteamiento, al basarse en una creencia personal, acepta que diferentes personas, "razonablemente" conocedoras asignen distintas probabilidades a un mismo evento. Esto debido a la diferencia en cuanto a la información disponible o a que evalúan con otros criterios las mismas evidencias. Esta situación es común en las decisiones en áreas como los negocios, la guerra y la política; por tanto, el enfoque subjetivo o personalista es frecuente entre los empresarios, los militares, los politólogos y los líderes políticos.

En este libro se adoptará esencialmente el punto de vista estadístico o frecuencial. Sin embargo, es importante destacar el hecho de que sea cual sea el enfoque adoptado, las propiedades y leyes vistas en las secciones anteriores son aplicables, y los resultados numéricos a los cuales conducen son los mismos. En otras palabras, hay consenso en cuanto a las aplicaciones prácticas del concepto de probabilidad, las diferencias fundamentales están en las visiones generales y filosóficas de esta.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. Seguidamente se indica una serie de temas que interesa investigar. Para cada uno, señale si corresponde a un problema propio de la estadística descriptiva o de la inferencial.
   a) Conocer la distribución, según número de aposentos de las viviendas registradas en el último Censo de Vivienda.
   b) Estimar el porcentaje de niños menores de 6 años que son dejados diariamente en guarderías cuando la madre sale a trabajar.
   c) Determinar el tiempo de permanencia de personas internadas en el Hospital San Juan de Dios en el curso del año pasado.
   d) Conocer la opinión de la población adulta de Costa Rica, en el momento actual, respecto a la participación del país en el Parlamento Centroamericano (PARLACEN).
   e) Establecer las diferencias en el rendimiento académico de los escolares sometidos a dos métodos distintos de enseñanza.
   f) Calcular la proporción de vehículos marca Toyota que hay actualmente en el país
2. Para cada una de las experiencias siguientes, escriba el espacio muestral correspondiente.
   a) Se tiene una caja con 6 bolas, 4 rojas y 2 blancas, se seleccionan consecutivamente 3 con reemplazo (cada una es devuelta a la caja antes de una nueva selección).
   b) Se tiene un dado corriente en una de cuyas caras hay un 1; en dos caras, un 2; y en las otras tres, un 3. Se lanza una moneda perfecta, si sale corona se detiene el juego; en caso contrario, se vuelve a lanzar la moneda, si sale corona se detiene el juego, pero si sale escudo, se lanza el dado, se observa el resultado y el juego termina.
3. La probabilidad de que un vehículo tenga 0, 1, 2, 3 o más accidentes en el curso de un año es, respectivamente, 0,47, 0,25, 0,13 y 0,05. Lea cuidadosamente lo anterior y luego indique por qué debe haber un error en ese párrafo.

4. En un estudio metodológico sobre encuestas de opinión pública, se hicieron 200 llamadas telefónicas a números residenciales seleccionados aleatoriamente, con el fin de determinar la frecuencia con que se presentaban cierto tipo de situaciones de encuesta. Se obtuvieron los siguientes resultados:

	NÚMERO DE LLAMADAS	PORCENTAJE
Entrevistas realizadas	140	70
Rechazó entrevista	16	8
Teléfono ocupado (4 intentos)	12	6
Teléfono no responde (4 intentos)	20	10
Informante no calificado	4	2
Tel. no residencial (oficina, comercio)	6	3
Tel. inactivo (suspendido, traslado, etc.)	2	1
TOTAL	200	100

a) Con base en esos resultados, el investigador fijó como probabilidades para los eventos los valores incluidos en la columna encabezada por los porcentajes. ¿Cuál enfoque utilizó para fijar las probabilidades?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al realizar una llamada, esta no conduzca a una entrevista realizada? ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada dé origen a un rechazo?

c) ¿En cuánto puede estimarse el nivel (proporción) de rechazo a las encuestas de opinión telefónicas a partir de la información anterior (NOTA: no es la misma respuesta que en b)?

5. En las siguientes situaciones indique: ¿qué enfoque considera más apropiado para la asignación de las probabilidades a los eventos o para el cálculo de las probabilidades requeridas?:

a) Número de coronas obtenidas en 10 lanzamientos de una moneda perfectamente equilibrada.

b) Número de bolas azules al seleccionar una muestra aleatoria de 4 bolas.

c) Un tornillo producido por una nueva máquina sea defectuoso.

d) Restablecimiento de la pena de muerte en Costa Rica, para culpables de asesinato, en los próximos diez años.

e) Existencia de alguna forma de vida en otro lugar del universo.

f) Tenencia de una libreta de ahorro en un banco estatal por un empleado de la empresa Intel.

g) Número de naipes de corazones que puede recibir un jugador cuando reparten las 52 cartas entre cuatro.

h) Que un recién nacido este año alcance los 75 años de vida.

i) Muerte de un hombre entre 18 y 24 años en un accidente automovilístico.

j) Nacimiento de trillizos.

k) Ocurrencia de un incendio en la bodega de una compañía durante el resto de este año.

l) Resta de los puntos obtenidos al lanzar dos datos perfectos.

m) Proporción de coronas que se obtendría al lanzar una moneda sesgada.

n) Clasificación de Costa Rica a la Copa Mundial de Futbol, suponiendo que ya clasificó para la ronda final, en esta participan 6 equipos, que Costa Rica obtendrá 15 puntos, ganando todos sus partidos como local y perdiendo de visita, y hay solo tres cupos para CONCACAF.

6. Después de la Segunda Guerra Mundial, la Península de Corea quedó dividida en dos países: Corea del Norte (régimen comunista) y Corea del Sur (régimen capitalista). En varias oportunidades, se han hecho gestiones y negociaciones tendientes a lograr algún acuerdo que permita a estos países reunificarse. Si un grupo de politólogos discute el tema de la unificación de las dos Coreas, ¿cuál enfoque cree que emplearán para fijar la probabilidad de ese evento?, ¿opina que todos coincidirán en un mismo valor o lo más probable es que den diferentes?, y si dan distintos valores, ¿podría decirse que todos o todos menos uno están equivocados?

7. Una fábrica produce anualmente una gran cantidad de bolas de beisbol. En promedio, con el proceso bajo control, se fabrica un 15% de bolas defectuosas. Cada una pasa un control antes de ser empacada para su distribución. Se sabe que el inspector de calidad califica erróneamente un 6% de las veces.

   a) Indique cuáles son las dos decisiones del inspector de calidad que llevan a un caso de una bola calificada erróneamente.

   b) Defina apropiadamente el evento "bola aceptada como buena".

   c) Calcule la probabilidad de que una bola sea aceptada como buena.

   d) Si usted fuera un consumidor de esas bolas, ¿cuál es la probabilidad de que, al abrir la caja que compró en la tienda, la encuentre defectuosa?

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. a) Estadística descriptiva
   b) Estadística inferencial
   c) Estadística descriptiva
   d) Estadística inferencial
   e) Estadística inferencial
2. a) Espacio muestral:
   1 2 1
   R R R
   R R B
   R B R
   B R R
   B R R
   R B B
   B R B
   B B R
   B B B

   R = bola roja
   B = bola blanca
   1 = la bola extraída
   2 = 2a bola extraída
   3 = 3a bola extraída
   b) Espacio muestral:
   C
   E C
   E E D = I
   E E D = 2
   E E D = 3

3. Existe un error en el párrafo porque la suma de las probabilidades de todos los eventos (número de accidentes en este caso) debe dar, como resultado, uno; y como puede notarse, esto no se cumple:

$$0{,}47 + 0{,}25 + 0{,}13 + 0{,}05 = 0{,}90.$$

4. a) Enfoque de probabilidad frecuencia1.

   b) Probabilidad de entrevista no realizada: $1 - 0{,}71 = 0{,}29$.

   Probabilidad de entrevista rechazada: 0,08.

   c) La estimación (neta) del nivel de rechazo a la entrevista plantea un problema, ya que el cálculo debe basarse en los números válidos, es decir, en aquellos integrantes de la población de interés. Se excluyen, en primer término, los teléfonos no residenciales, los inactivos y los casos en los cuales no hay un informante calificado. Queda luego el problema de los que están ocupados y no responden, para estos no se sabe qué habría sucedido si se hubiera hecho contacto. Una solución es suponer que el comportamiento habría sido similar al de los que respondieron y, en consecuencia, excluirlos también del cálculo. Bajo estos supuestos, el nivel de rechazo neto se calcula dividiendo los que rechazaron entre el total de contactados: $16/156 = 10{,}26\%$.

5. a) Clásica

   b) Clásica

   c) Frecuencial

   d) Personalista

   e) Personalista

   f) Frecuencial

   g) Clásica

   h) Frecuencial

   i) Personalista

   j) Frecuencial

   k) Frecuencial

   l) Frecuencial

   m) Frecuencial. Note que la moneda es sesgada, entonces el enfoque clásico resulta inapropiado

Este problema puede abordarse usando la definición clásica, es decir, enumerando todos los resultados posibles y observando cuántos, de los que le dan 15 puntos, pueden alcanzar un cupo.

También puede usarse la probabilidad personalista, tomando como base las características del torneo y recurriendo al conocimiento de las eliminatorias previas y del nivel de los equipos de parte de quien realiza el cálculo.

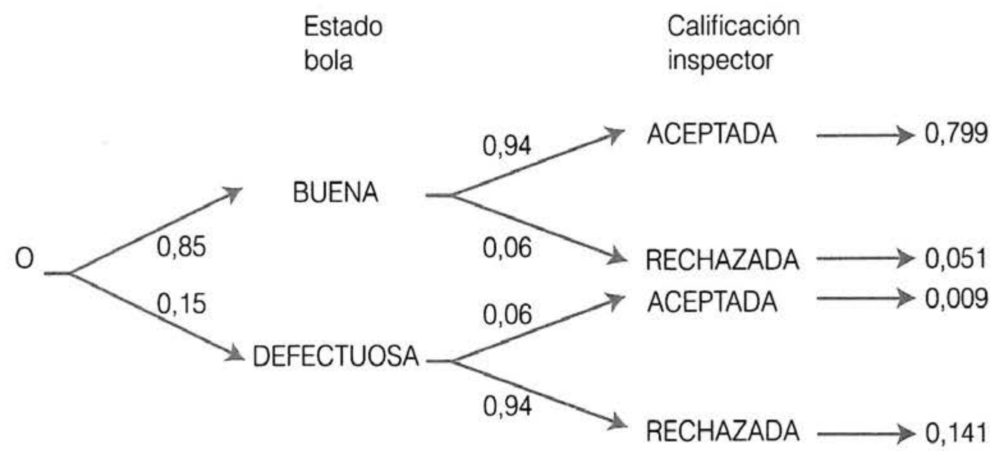
El enfoque frecuencial tampoco está excluido, es posible usar la evidencia empírica de eliminatorias previas, jugadas con ese formato o con uno similar. Las frecuencias relativas de esas experiencias pueden usarse para estimar las posibilidades de clasificación con 15 puntos.

6. Usarán el enfoque personalista. Como lo que están expresando es su creencia de que el evento suceda, pueden proponer diferentes probabilidades. Todas son válidas.

7. a) Una bola calificada erróneamente puede deberse a que una buena se calificó como defectuosa o una mala como buena.

   P(calificada buena/es defectuosa) = P(Calif icada defectuosa/es buena)= 0,06.

   b) El evento "bola aceptada como buena" lo forman dos eventos simples: bola buena aceptada por el inspector y defectuosa aceptada por el inspector (ver diagrama de árbol).



   c) La probabilidad de que una bola producida sea aceptada como buena viene dada por la expresión:

$$P(\text{aceptada / es buena}) + P(\text{aceptada / es defectuosa}) = (0,85)\cdot(0,94) + (0,15)\cdot(0,06)$$
$$= 0,799 + 0,009 = 0,808.$$

   d) Esta probabilidad se obtiene dividiendo la probabilidad de "bola defectuosa aceptada como buena" entre la probabilidad de que una bola sea aceptada como buena: 0,009/0,808 = 0,0111.

   La probabilidad de que la bola que compró salga defectuosa es ligeramente superior al 1%.