Capítulo 4

LOS NÚMEROS RELATIVOS

Sumario

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio del capítulo, el estudiante será capaz de:

1. Explicar el propósito que cumplen los números relativos.
2. Calcular e interpretar las tasas y proporciones de uso más corriente.
3. Señalar y explicar cuáles son los efectos que tiene el cambio de base en el cálculo de los porcentajes.
4. Explicar qué es un índice e interpretar con precisión los índices de precios.
5. Seleccionar el número relativo adecuado para los problemas específicos más comunes.
6. Mencionar los errores más comunes que se presentan en el uso de los números relativos y señalar la forma de evitarlos.

Resumen

El propósito de este capítulo es mostrar la necesidad y utilidad de los números relativos en el análisis y resumen de datos. Se expone el procedimiento de cálculo, la interpretación y el uso de las medidas relativas utilizadas más corrientemente. Se alerta, al estudiante, acerca de los errores más comunes en el uso de los números relativos.

4.1. LA NECESIDAD DE RESUMIR Y COMPARAR LA INFORMACIÓN: LOS NÚMEROS RELATIVOS

En ciertas situaciones, cuando se analiza información –demográfica, social, económica, educativa o de otro tipo– y se hacen comparaciones o se toman decisiones, las cifras absolutas pueden ser suficientes. Así, saber que una universidad aceptó un total de 4500 estudiantes nuevos para el próximo año lectivo, en lugar de los 4000 recibidos este año, es un dato útil para los planificadores y significa, por ejemplo, que deben crearse 10 grupos más de 50 alumnos en el primer año y asignar profesores, espacio y otros recursos materiales y didácticos para la atención de ese incremento en la matrícula.

En otras situaciones, sin embargo, el número absoluto no basta y se hace necesario compararlo con otra cifra o relacionarlo con el universo del cual proviene, para poder interpretarlo en forma adecuada y usarlo provechosamente.[1] Esto lleva al uso de los llamados *números relativos*, dentro de los cuales se incluyen las *razones, las proporciones, los porcentajes, las tasas y los índices*. En el ejemplo anterior, la cifra absoluta de alumnos nuevos admitidos no es suficiente si se quiere determinar en qué medida está respondiendo la universidad a las demandas de ingreso a la educación superior; para ello, sería más útil saber cuál es la proporción admitida de aspirantes. Esto se logra dividiendo el número de admitidos en cada año, entre el número de aspirantes que solicitaron ingreso, los cuales fueron 8000 y 10 000 este año y el próximo, respectivamente:

$$\frac{4000}{8000} = 0,50 \rightarrow 0,50 \cdot 100 = 50\%.$$

$$\frac{4500}{10\,000} = 0,45 \rightarrow 0,45 \cdot 100 = 45\%.$$

1. En este contexto, universo se entiende como el total de individuos o elementos motivo de estudio.

Los porcentajes revelan que la universidad admitirá, relativamente, menos estudiantes el año entrante, ya que aceptará solo a 45 de cada 100 solicitantes; mientras que este admitió a 50 de cada 100.

Al calcular un número relativo no solo se reducen los números grandes y se facilita su manejo, sino que es posible establecer relaciones que no están presentes en el número absoluto y aumentan su utilidad y significado. Además, al poseer una expresión relativa, pueden hacerse comparaciones entre el grupo de datos en consideración y otros similares. Por lo tanto, se concluye que el empleo de números relativos contribuye al análisis de un conjunto de datos, en tres formas:

a) Resume algún aspecto o dimensión de los datos.

b) Expresa alguna relación entre dos o más números.

c) Facilita la comparación entre los datos en consideración y otros similares.

Ahora conviene hacer referencia a las características e interpretación de los principales tipos de números relativos.

4.2. RAZONES, PROPORCIONES Y PORCENTAJES: CÁLCULO E INTERPRETACIÓN

Es importante indicar lo que se entiende por razón y proporción, y lo que representa un porcentaje.

4.2.1. Razón

Es la relación entre dos números. Por ejemplo, si se tienen los números A y B, la razón entre ellos será A dividido entre B, esta razón puede ser indicada como $A{:}B$, o como A/B. La razón A/B indica cuántas veces cabe B, el denominador, en el numerador A. Los números que se relacionan pueden pertenecer al mismo universo de datos o provenir de universos diferentes.[2]

2. En estadística es muy común, cuando se trabaja con razones o proporciones, llamar al denominador de la proporción, razón o porcentaje, base y así, se habla de la base del porcentaje. Esto resulta muy importante, dado el papel que tiene (la base) en la interpretación de los porcentajes y en la valoración de la confiabilidad que merecen.

4.2.2. Proporción

Una proporción es también una razón, pero con dos características especiales:

Relaciona dos números del mismo universo.

Relaciona una parte con el todo.

Por ejemplo, si se tienen los números *A*, *B* y *C*, pertenecientes al mismo universo, una proporción sería $\frac{B}{A+B+C}$. Como puede apreciarse, *B* numerador forma parte del denominador, que es el total; por ello, la proporción indica qué parte o fracción del total $(A + B + C)$ representa *B* y, lógicamente, varía entre 0 y 1.

Para ilustrar estos conceptos, suponga que se tiene un grupo de 600 estudiantes; de ellos, 450 son hombres y 150 mujeres.

Ejemplo de razón: $\frac{\text{Hombres}}{\text{Mujeres}} = \frac{450}{150} = 3.$

Ejemplo de proporción: $\frac{\text{Hombres}}{\text{Mujeres}} = \frac{450}{600} = \frac{3}{4} = 0,75.$

Note que los valores resultantes del cálculo pueden verse también como razones que tienen como denominador la unidad. Es decir, $3 = \frac{3}{1}$ y $0,75 = \frac{0,75}{1}$.

¿Cómo debe interpretarse cada uno de esos valores? En el primer caso, se dice que se tienen 3 hombres por cada mujer. En el segundo, se tendría el valor 0,75, equivalente a $\frac{3}{4}$, e indica que tres cuartas partes de los alumnos son hombres.

4.2.3. Porcentajes

En la práctica, sin embargo, puede resultar incómodo interpretar, analizar y comunicar **números relativos** expresados en valores por unidad; por ello, es muy común que se expresen "por 100", multiplicándolos por ese número y usando el símbolo de %. Si se realiza este ejercicio para los dos casos anteriores, se obtiene:

$$\frac{450}{600} \cdot 100 = 0,75 \cdot 100 = 75\%.$$

$$\frac{450}{150} \cdot 100 = 3 \cdot 100 = 300\%.$$

Estos son ejemplos claros de porcentajes o de cifras expresadas con base 100. Los valores resultantes se expresan indicando que "un 75% de los estudiantes son hombres", en el primer caso, y que "hay 300 hombres por cada 100 mujeres", en el segundo. Esta última medida, que usualmente se indica sin el símbolo %, se denomina **índice de masculinidad,** es muy utilizada para analizar la distribución por sexo de una población.

4.2.4. Amplificación de razones y proporciones

Se está muy habituado a los porcentajes por ser de uso muy corriente. Esto no quiere decir, sin embargo, que solo se utilicen números relativos con base 100. En el caso anterior, se utilizó un factor de amplificación de 100 porque resultaba cómodo, pero no siempre es así. Cuando la razón o proporción resulta pequeña, puede ser necesario multiplicarla por un factor k de ampliación más grande como 1000, 10 000 y hasta un millón[3].

Así, en el caso del suicidio, un fenómeno cuya frecuencia no es muy elevada la tasa anual no se da en porcentajes sino en cifras por 100 000 habitantes. Como ejemplo, considérese el caso de Costa Rica en el 2008, año en el que se registró un total de 325 suicidios en una población estimada, a mitad del año, en 4 451 262 habitantes.

En este caso, siguiendo una definición mundialmente aceptada, la tasa de suicidios se calcula dividiendo el total de suicidios ocurridos en el año 2008 entre la población a mitad de ese año, y multiplicando el resultado por 100 000:

$$\text{Tasa de suicidios } = \frac{\text{número de suicidios}}{\text{población a mitad de año}} \cdot 100\,000 = \frac{325}{4\,451\,262} \cdot 100\,000$$

$$= 0,000073 \cdot 100\,000 = 7,3 \text{ por cien mil habitantes.}$$

El examen de los resultados muestra que la cifra por unidad es sumamente pequeña, 0,000073, por ello es muy difícil de interpretar y manejar; en cambio, la cifra amplificada, expresada por 100 000 habitantes, resulta mucho más simple y cómoda de interpretar y comunicar.

3. Teóricamente, cualquier número podría ser usado como factor de amplificación de una razón; es obvio, sin embargo, que utilizando potencias de 10, como 100 o 1000, se logra mayor comodidad en el manejo y análisis de las razones. Por ejemplo, en general las tasas de mortalidad se dan por mil, sin embargo, las tasas para causas de muerte específicas se dan por 100 000, ya que es más cómodo dar una tasa de 7,8 por 100 000 que expresarla como 0,000078; un factor de ampliación tan alto como un millón o más se usa cuando la frecuencia del fenómeno en estudio es sumamente baja: un ejemplo es el caso de la seguridad de los vuelos en avión, la cual se mide en muertes en accidentes por kilómetros-pasajero transportados.

De lo anterior, es claro que la amplificación parte de la igualdad de las dos proporciones siguientes, donde P representa el valor porcentual:

$$\frac{A}{B} = \frac{P}{100}.$$

Despejando P, se llega a la siguiente expresión:

$$P = \frac{A}{B} \cdot 100 = \left(\frac{A}{B}\right)\%.$$

La expresión general de una razón amplificada es $\frac{A}{B} \cdot k$, donde k es un múltiplo de 10, usado como factor de amplificación de la razón o proporción.

Así, en el ejemplo de los 600 estudiantes antes mencionados, la proporción de hombres resulta de 0,75 con base unitaria y de 75 con base 100, la cual se indica así:

$$\text{Proporción por hombres} = \frac{450}{600} \cdot 100 = 0,75 \cdot 100 = 75\%.$$

4.2.5. La importancia de la base en la razón o proporción amplificada

Cuando se expresa un número relativo en forma porcentual debe quedar bien claro cuál es la base original sobre la que se calculó, pues la interpretación del porcentaje (y de toda cifra amplificada) depende, fundamentalmente, de la cifra usada como base para el cálculo.

Para explicar bien este punto, acerca del papel clave de la base en la interpretación de los porcentajes, se considera un ejemplo simple.

Ejemplo 1

En las elecciones nacionales de febrero de 1990, en Costa Rica, se eligió un total de 157 mujeres como regidoras propietarias o suplentes. En febrero del 2010, el número de regidoras propietarias y suplentes, alcanzó la suma de 422, un aumento de 265.

¿Qué tipo de relaciones pueden establecerse entre esos números?

Las siguientes, como puede apreciarse:

1. $\frac{422}{157} \cdot 100 = 269\%$

2. $\frac{265}{157} \cdot 100 = 169\%$

3. $\frac{157}{422} \cdot 100 = 37\%$

4. $\frac{265}{422} \cdot 100 = 63\%$

¿Son todos estos porcentajes correctos? ¿Cómo se interpreta cada uno de ellos?

En primer término, todos son correctos, es decir, están bien calculados; lo que cambia de uno a otro es la forma como deben ser interpretados, pues depende de los valores que se relacionen y del año que se esté tomando como base para el cálculo.

CASO 1: 269% Aquí se relaciona el total de regidoras elegidas en el 2010 con el total de elegidas en 1990. Por ello, el valor 269% debe interpretarse en el sentido de que "el número de regidoras electas, en el 2010, fue un 269% del número electo en 1990" o, más claramente, "por cada 100 regidoras electas en 1990, hay 269 en el 2010".

CASO 2: 169% Se relaciona el aumento absoluto en el número de regidoras, 265, con el total de regidoras en 1990. El valor 169% debe interpretarse como: "el número de regidoras aumentó en un 169% con respecto a 1990", o también "por cada 100 regidoras electas en 1990 hubo 169 más en el 2010".

CASO 3: 37% En este cálculo, se relaciona el total de regidoras de 1990 con el total de regidoras en el 2010; la base es 2010 y no 1990, como en los porcentajes anteriores. Por ello, la interpretación es: "el número total de regidoras en 1990 representa un 37% del total de regidoras en el 2010", o sea "por cada 100 regidoras electas en el 2010 habían 37 en el 1990".

CASO 4: 63% Se relaciona el aumento absoluto en el número de regidoras, 265, con el total de regidoras electas en el 2010, siendo la base –por lo tanto– el 2010. Se interpreta señalando que "el aumento en el número de regidoras representa un 63% del total de regidoras en el 2010".

Si se interpreta correctamente, cualquier porcentaje de los cuatro incluidos puede ser utilizado. En la práctica, sin embargo, hay una clara tendencia a usar como base el año más alejado. Por esta razón, si se quiere indicar el porcentaje de aumento, el valor más adecuado es 169% (CASO 2), ya que, sin ninguna duda, todos los lectores o usuarios de la cifra la interpretarán en el sentido de que "entre 1990 y el 2010 se produjo un aumento del 169% en el número de regidoras", la cual es perfectamente correcta. Por otra parte, si la cifra que se da es 63% (CASO 4), tan solo con una explicación muy clara, la mayoría de las personas interpretará que el número de regidoras aumentó en un 63% en el período, lo cual es incorrecto.

Otro punto importante, sobre este tema de la base, es el hecho de que una disminución en un cierto porcentaje no es compensada por un aumento posterior de igual magnitud. Para aclarar este punto, considérese la siguiente ilustración.

Ejemplo 2

Suponga que el número promedio de visitantes por semana a un parque de diversiones era de 2000. Al nuevo gerente le informan que, en lo que va de este año, ese número se ha reducido en un 40%.

¿En qué porcentaje debe aumentarse el número semanal actual de visitantes –o sea, el número reducido- para obtener de nuevo una visita promedio semanal de 2000?

Si no se piensa mucho, podría concluirse, en forma precipitada y errónea, que basta aumentar el número reducido en 40% para tener de nuevo el número usual de visitantes. Los cálculos respectivos señalan que no es así. Observe:

a) El 40% de 2000 es: 2000 · 0,40 = 800, por lo tanto, el número reducido de visitantes es: 2000 – 800 = 1200.

b) El 40% de ese número reducido es: 1200 · 0,40 = 480; si se suman 480 a 1200, se obtiene 1680, que es inferior a 2000.

Evidentemente, no basta con aumentar en 40% el nuevo número (1200) para obtener el antiguo (2000). En realidad, para tener de nuevo 2000 debe sumarse 800 a 1200, y como:

$$\frac{800}{1200} \cdot 100 = 66,7\%.$$

Se concluye, entonces, que para obtener de nuevo la cifra promedio usual de 2000 visitantes semanales, el número reducido, 1200, debe incrementarse en un 66,7%.

$$0,667 \cdot 1200 = 800$$

$$1200 + 0,667 \cdot 1200 = 1200 - 800 = 2000.$$

Todo el problema se relaciona con la base. En realidad, la disminución y el aumento son las mismas en términos absolutos: 800; no obstante cuando se trata de la reducción del número original, 800 debe relacionarse con 2000, lo que produce una disminución del 40%, mientras que en el caso del aumento del número reducido, 800 debe relacionarse con 1200, lo cual produce un porcentaje de aumento de 66,7%.

4.3. LAS TASAS: CONCEPTO, CÁLCULO E INTERPRETACIÓN

El término **tasa** es de uso muy común en la vida diaria, pero con frecuencia se utiliza en forma confusa. Así, se habla de **tasa de alfabetismo**, cuando en realidad se trata del porcentaje puro y simple de personas alfabetizadas en la población de 10 años y más. También, en ciertos casos, se habla de "tasas" para hacer referencia a índices más complejos. Debido a esto, puede afirmarse que el término, en sí, no tiene un significado exacto en el lenguaje corriente, y en cada caso se debe determinar a qué se refiere realmente la medida.

4.3.1. Las tasas vitales

En rigor, el verdadero sentido del término tasa incluye la consideración de un período de referencia o de observación como el de las **tasas vitales** que se usan en demografía; estas indican la frecuencia relativa de un fenómeno en un período dado, generalmente un año. Como ejemplo, tome la llamada tasa bruta de natalidad:

$$\text{Tasa bruta de natalidad} = \frac{\begin{array}{c}\text{Nacimientos vivos ocurridos}\\ \text{durante el año natural Z}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Población total a mitad del}\\ \text{año natural Z}\end{array}} \cdot 1000.$$

Esta tasa indica cuántos nacimientos, por cada 1000 habitantes, se produjeron durante el año natural[4] considerado (Z) en una cierta área. Así, por ejemplo, en el caso de Costa Rica, los datos suministrados por el Instituto Nacional de Estadística y Censos señalan que en el 2008 ocurrieron un total de 75 187 nacimientos vivos en el país; así mismo, indican que la población total se estimaba para mediados de ese año (30 de junio del 2008), en 4 451 205 personas. Esta información nos permite obtener la tasa bruta de natalidad.

$$\text{Tasa bruta de natalidad 2008 } \frac{75\,187}{4\,451\,205} \cdot 1000 = 16{,}9 \text{ por mil.}$$

La tasa observada de 16,9 por mil se interpreta señalando que, en el 2008 ocurrieron en Costa Rica alrededor de 17 nacimientos por cada mil habitantes. Note que el factor de amplificación empleado es de 1000, por ello la tasa se expresa por mil habitantes.[5]

La tasa bruta de mortalidad se calcula siguiendo un procedimiento idéntico, con la única diferencia de que en el numerador se coloca el número total de defunciones ocurridas durante el año natural Z.

4. Se dice año natural, civil, usual o corriente al período que va desde el 1 de enero al 31 de diciembre del mismo año; por ejemplo, el año natural 2010 comprende desde el 1 de enero al 31 de diciembre del 2010.

5. Con frecuencia se usa el símbolo o/oo para indicar "por mil". El lector debe estar atento para no confundir esta forma de indicar "por mil" con el símbolo de "por ciento" (%).

Como los datos del INEC indican para Costa Rica, en el 2008, un total de 18 021 defunciones, la tasa bruta de mortalidad resulta de 4,1 por mil:

$$\text{Tasa bruta de mortalidad 2008 } \frac{18\,021}{4\,451\,205} \cdot 100 = 4,0 \text{ por mil.}$$

Esta tasa señala que en el año 2008, en Costa Rica, ocurrieron alrededor de cuatro defunciones por cada mil habitantes.

Si a la tasa bruta de natalidad se le resta la tasa bruta de mortalidad se obtiene la tasa de crecimiento natural o crecimiento vegetativo, la cual resulta ser, para el 2008, la siguiente:

$$\text{Tasa de crecimiento natural } 16,9 - 4,0 = 12,9 \text{ por mil o 1,3\%.}^{6}$$

Esta tasa indica el crecimiento neto ocurrido durante ese año por el efecto combinado de la natalidad y la mortalidad, y señala que en Costa Rica, en el 2008, la población creció a un ritmo de 1,3 personas por cada 100 habitantes o, también, de 13 personas por cada 1000.[7]

4.3.2. Tasas de crecimiento

Tasas muy utilizadas y comentadas por los economistas, planificadores, banqueros demógrafos y otros profesionales, que aparecen con frecuencia en los medios de comunicación, son las llamadas **tasas de crecimiento anual.** Así, se habla de que la tasa de crecimiento anual de la población es de un 2%, que la economía creció un 5% en el último quinquenio o se espera que las exportaciones crezcan un 10% en los dos próximos años.

Las tasas de crecimiento se emplean para resumir el comportamiento de una variable en un cierto período e implican la selección de un modelo de crecimiento, es decir, el supuesto de que el fenómeno en cuestión se comporta siguiendo un patrón definido. Entre los patrones de crecimiento más comúnmente utilizados están el modelo aritmético y el geométrico, también existe otro, denominado exponencial. Para introducir estos conceptos, se recurrirá a un ejemplo con tasas de interés, en el cual se usan ambos modelos.

Suponga que dos hermanos gemelos de 20 años de edad –Ari y Geo– reciben, cada uno, una herencia de $ 50 000 –cincuenta mil dólares– el 2 de enero del 2006. Esta debe permanecer en un banco durante 5 años, aunque cada uno es libre de disponer de los intereses como lo tenga a bien. El banco paga el 4% anual.

6. Aunque las tasas de natalidad y mortalidad se expresan por mil, una práctica muy extendida es que la tasa de crecimiento natural se exprese en porcentaje.
7. Note que la tasa de crecimiento natural o vegetativo no toma en cuenta el efecto de la migración. Si se hace, se obtiene la tasa real que puede resultar, en alguna medida, diferente a la natural, dependiendo de la intensidad y dirección de los movimientos migratorios internacionales.

El 2 de enero del 2007, **Ari** acude al banco, retira los intereses que ascienden a $ 2000 dólares (50 000 – 0,04), se los lleva para su casa y los guarda en su caja fuerte. **Geo,** por el contrario, pide al banco que los $ 2000 de intereses se agreguen a los $ 50 000 y queden depositados devengando interés. El 2 de enero del 2008 se repite la escena: Ari retira sus intereses y los coloca en su caja fuerte y Geo pide que los dejen devengando interés. Pero hay una diferencia: Ari recibe $ 2000, mientras que Geo obtiene $ 2080, ya que a los $ 2000 que le corresponden, por la suma inicialmente invertida, deben agregarse $ 80 ganados sobre los intereses que invirtió el 2 de enero de 2007. Este proceso se continúa hasta el 2 de enero del 2011, cuando ambos retiran el dinero del banco y se lo llevan para la casa. Ahora bien, ¿cuánto tiene cada uno después de 5 años? La respuesta se muestra en la tabla 4.1:

Cuadro 4.1

EVOLUCIÓN DE UNA SUMA DE 50 000 DÓLARES
A UNA MISMA TASA DE INTERÉS BAJO DOS ESQUEMAS DE INVERSIÓN

FECHA	GEMELO ARI			GEMELO GEO	
	Monto en banco	**Intereses ganados**	**Monto en caja fuerte**	**Monto en banco**	**Intereses ganados**
2/1/2006	50 000		------	50 000	------
2/1/2007	50 000	2 000	2 000	52 000	2 000
2/1/2008	50 000	2 000	4 000	54 080	2 080
2/1/2009	50 000	2 000	6 000	56 243	2 163
2/1/2009	50 000	2 000	8 000	58 493	2 250
2/1/2010	50 000	2 000	10 000	60 833	2 340
		10 000			10 833

De acuerdo con la información del cuadro 4.1, se tiene:

ARI	GEO
Monto inicial (BANCO) 50 000	Monto inicial (BANCO) 50 000
Intereses ganados 10 000	Intereses ganados 10 833
2/1/2011 Monto final 2/1/2011 60 000	2/1/2011 Monto final 2/1/2011 60 833

Puede notarse que **Ari** tiene $ 60 000 y **Geo** $ 60 833. ¿A qué se debe la diferencia?

En el caso de **Ari**, opera lo que se denomina el interés simple: los intereses ganados no se capitalizan, no se unen al monto invertido para ganar interés en el período siguiente. Debido a ello, su capital aumenta anualmente en un monto absoluto fijo, $ 2000 = 0,04 de 50 000.

Dicho de otra forma, el capital de Ari aumenta en proporción aritmética.

En el caso de **Geo,** opera el interés compuesto, los intereses ganados en un año se agregan al monto invertido, se capitalizan, y ganan interés en el período siguiente. En este caso, su capital crece en montos absolutos cada vez mayores, ya que los intereses no representan el 4% de la suma inicial, $50 000, sino el 4% de la suma acumulada al principio de cada año. Dicho de otro modo, el capital de Geo crece en proporción geométrica, es decir, en un porcentaje constante.

Para determinar la suma acumulada al cabo de 5 años (o al final de cualquier año), no hace falta construir la tabla anterior. El cálculo puede hacerse directamente utilizando las fórmulas ya conocidas del interés simple y del compuesto, que corresponden al crecimiento aritmético y geométrico.

Sean:

- M_t: monto acumulado al final del período t.
- M_o: monto inicial invertido.
- t: número de períodos (tiempo).
- r: tasa de interés por período.

Caso de Ari - interés simple

Interés ganado en el año $= M_0 \cdot r$

Suma total ganada en intereses en todo el período considerado $= M_0 \cdot r \cdot t = M_{0rt}$.

$$M_t = M_0 + intereses\ totales = M_0 + M_{0rt} = M_0(1 + rt).$$

- **FÓRMULA GENERAL MODELO ARITMÉTICO**

$$M_t = M_0(1 + rt).$$

Por lo tanto, el monto acumulado por Ari, al final de los cinco años (M_5), es:

$$M_5 = 50\,000[1 + 0,04 \cdot 5] = 50\,000 \cdot 1,20 = 60\,000.$$

Caso de Geo - interés compuesto

Interés devengado en el primer período $= M_0 \cdot r$

Interés segundo período $= M_{1r}$

Interés en período $t = M_{tr}$

Monto al inicio del segundo período $M_1 = M_0 + M_{0r} = M_0(1 + r)$.

$$M_2 = M_1 + M_{1r} = M_1(1 + r).$$

Pero se sabe que $M_1 = M_0(1 + r)$; entonces, sustituyendo, se tiene que:

$$M_2 = M_0(1 + r)(1 + r) = M_0(1 + r)^2.$$

En igual forma:

$$M_3 = M_2 + M_{2r} = M_2(1 + r) = M_0(1 + r)^2(1 + r) = M_0(1 + r)^3.$$

- **FÓRMULA GENERAL MODELO GEOMÉTRICO**

$$M_t = M_0(1 + r)^Y.$$

De acuerdo con este modelo, el monto acumulado, al final de los cinco años (M_5), por Geo es:

$$M_5 = 50\,000[1 + 0,04]^5 = 50\,000 \cdot 1,21665 = 60\,833.$$

Una situación de esta misma naturaleza se presenta en el caso de las proyecciones.[8] Suponga que una cooperativa tiene, a mediados de 2010, un total de 500 asociados. Basándose en cierta información disponible, un economista hace el supuesto de que el número de asociados crecerá durante los próximos cuatro años al 10% anual. ¿Cuántos miembros tendrá la cooperativa a mediados del 2014?

Si el economista tuvo en mente un modelo de **crecimiento aritmético**, se esperará, para el 2014, $M_4 = 700$ asociados.

$$M_4 = M_0(1 + rt) = 500(1 + 0,10 \cdot 4) = 500 \cdot 1,4 = 700.$$

Pero si consideró un modelo de **crecimiento geométrico**, el número esperado de asociados será:

$$M_4 = M_0(1 + r)^4 = 500(1,10)^4 = 500 \cdot 1,4641 = 732.$$

4.3.3. El cálculo de las tasas de crecimiento

En los dos ejemplos anteriores, se da la tasa de crecimiento y luego se pide calcular el monto al final del período. El problema inverso, o sea, el cálculo de la tasa de crecimiento de acuerdo con el monto inicial y final, es también muy frecuente.

Las fórmulas para calcular las tasas de crecimiento se obtienen despejando r de los modelos aritméticos y geométricos presentados en páginas anteriores:

8. Por proyección se entiende el resultado de los cálculos hechos sobre la evolución futura de un fenómeno determinado, con base en información de períodos anteriores y de suposiciones sobre el comportamiento de la variable o fenómeno de interés.

- **TASA DE CRECIMIENTO ARITMÉTICO**

Se sabe que en este modelo $M_t = M_0(1 + rt)$.

Despejando r de esa expresión, se obtiene la fórmula para la tasa de crecimiento aritmética

$$r = \frac{1}{t} \cdot \frac{M_t - M_0}{M_0} = \frac{1}{t} \cdot \left[\frac{M_t}{M_0} - 1\right].$$

- **TASA DE CRECIMIENTO GEOMÉTRICO**

La expresión para este modelo es $M_t = M_0(1 + r)^t$.

Si se despeja r, se obtiene la tasa de crecimiento geométrico:

$$r = \sqrt[t]{\frac{M_t}{M_0}} - 1 = \left(\frac{M_t}{M_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1.$$

Ejemplo 3

Información publicada por el Instituto Costarricense de Turismo revela que, en el año 1993, Costa Rica recibió un total de 684 005 turistas y, en el 2008, la cifra correspondiente fue de 2 089 174.[9] ¿Qué puede decirse, a partir de esas cifras, del crecimiento del número de turistas ingresados al país en los últimos 15 años?

Una primera forma de evaluar el crecimiento es calculando el aumento absoluto ocurrido en el período y luego dividirlo entre el total recibido en 1993, para observar el aumento relativo. Use N_0 y N_1 para representar los totales de 1993 y del 2008.

Aumento absoluto:

$$N_1 - N_0 = 2\,089\,174 - 684\,05 = 1\,05\,169.$$

Aumento relativo:

$$\frac{N_1 - N_0}{N_0} = \frac{1\,405\,619}{684\,005} = 2,05433 = 205,43\%.$$

El valor 205,43% indica que por cada 100 turistas que ingresaron en el año 1993, en el año 2008 hubo 205, o sea, 105 más. Ello informa, por lo tanto, el aumento relativo ocurrido en los 15 años, tomando como base el valor de 1993.

El cambio también puede resumirse con una tasa de crecimiento. Para ello, debe relacionarse el cambio relativo con el tiempo transcurrido (15 años) y suponer que el número de turistas sigue un cierto patrón de crecimiento.

9 Este tipo de información puede obtenerse del Anuario Estadístico de Turismo del ICT o del Anuario Estadístico del INEC.

4.3.3.1. *Tasa de crecimiento aritmético*

Si se supone un crecimiento aritmético, la tasa es la siguiente:

$$r = \frac{1}{t} \cdot \frac{N_1 - N_0}{N_0} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1405169}{684005} = 13,7\,\%.$$

Este resultado indica que, bajo el supuesto de un crecimiento aritmético, el número de turistas creció entre 1993 y el 2008 a una tasa promedio anual de 13,7%.[10]

4.3.3.2. *Tasa de crecimiento geométrico*

Si se supone que el número de turistas creció en forma geométrica, la tasa es la siguiente:

$$r = \sqrt[T]{\frac{N_1}{N_0}} - 1 = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{\frac{t}{1}} - 1$$

$$r = \left[\frac{N_1}{N_0}\right]^{\frac{1}{15}} - 1 = \left[\frac{2\,089\,174}{684\,005}\right]^{0,06667} - 1 = (3,054326)^{0,06667} - 1 = 1,07728 - 1 = 7,73\%.$$

El resultado indica que, en el período considerado, el número de turistas creció, en promedio, a una tasa geométrica de 7,73% anual.

4.3.3.3. *Modelo exponencial*

El modelo geométrico supone que los incrementos se dan en períodos regulares, comúnmente anuales, se producen al final del año y se obtienen aplicando la tasa de crecimiento al total, al comienzo del año. Una suposición más realista es que el crecimiento (del número de turistas, en este caso) se produce en forma continua.

Este supuesto origina el modelo exponencial, en el cual se sustituye la expresión $(1 + r)^t$ por e^{rt}, que es el valor límite de $(1 + r)^t$ cuando el número de períodos t tiende al infinito y la amplitud del período tiende a 0. La letra e representa una constante muy conocida, base de los logaritmos naturales, que es aproximadamente igual a 2,718282.

10. Esta tasa $r = 13,7\%$ supone que cada año el número de turistas creció en un 0,137 de 684 005, o sea, en 93 709 turistas.

- **FÓRMULA GENERAL DEL MODELO DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL**

$$N_t = N_0 e^{rt}.$$

La fórmula para la tasa de crecimiento se obtiene despejando *r:*

$$e^{rt} = \frac{N_t}{N_0}.$$

$$e^{rt} = \left[\frac{N_t}{N_0}\right]^{\frac{1}{t}}.$$

Tomando logaritmos naturales (base *e*)

$$r = \frac{1}{t}\ln = \left[\frac{N_t}{N_0}\right].$$

En el caso del aumento en el número de turistas, entre 1993 y 2008, la tasa de crecimiento anual –modelo exponencial– para el período 1990-2010, resulta 7,44%, como puede observarse seguidamente:

$$r = \frac{1}{15}\ln\left[\frac{2\,089\,174}{684\,005}\right] = \frac{1}{15}\ln(3,054326) = \frac{1,116559}{15} = 0,0744 = 7,44\%$$

Note que el valor es similar al obtenido con el modelo geométrico.

4.3.4. Comparación de las tasas de crecimiento

Las tasas anuales calculadas con los tres modelos resultan: 13,7% para el **aritmético,** 7,7% para el **geométrico** y 7,4% para el **exponencial**. Las diferencias entre ellas, en el orden de magnitud, se deben a las características de los modelos. En el aritmético, el aumento es calculado aplicando la tasa al monto, al inicio del período considerado; por ello, los aumentos absolutos anuales son constantes. En el geométrico, por el contrario, la tasa es aplicada a la población o monto al principio de cada año, la cual incorpora los aumentos ocurridos en años anteriores y, consecuentemente, los aumentos anuales absolutos son crecientes y por ello la tasa geométrica –siendo menor– conduce, al final del período, a un mismo valor que el modelo aritmético.

Igualmente, la tasa exponencial es menor que la geométrica, porque mientras esta supone que los aumentos se producen al final de cada período anual, la exponencial da por sentado que el crecimiento es un proceso continuo a través de todo el período.

Las razones que explican las diferencias en las tasas de crecimiento para un mismo período, con los mismos datos, dependiendo del modelo utilizado, esclarecen también por qué proyecciones realizadas con igual tasa anual, pero con diferentes modelos, conducen a valores mayores con el modelo exponencial, a menores con el aritmético, y a magnitudes intermedias entre los dos, si se aplica el geométrico.

Como ejemplo, considere la proyección del volumen esperado de turistas para el 2013, partiendo de la cifra del 2008 y suponiendo una tasa de crecimiento anual de 7%, bajo los tres modelos.

Aritmético: $2\,089\,174(1 + 0,07 \cdot 5) = 2\,089\,174 \cdot 1,35 = 2\,820\,385$.

Geométrico: $2089174(1 + 0,07)^5 = 2\,089\,174 \cdot 1,4025517 = 2\,930\,175$.

Exponencial: $2\,089\,174 \cdot e^{0,07 \cdot 5} = 2\,089\,174 \cdot 1,419068 = 2\,964\,679$.

Tal como se había indicado, la población mayor se obtiene con la tasa exponencial y la menor, con la aritmética. Sin embargo, el valor calculado con la tasa geométrica es bastante cercano al dado por la exponencial. Esto sucede siempre que el valor de r no es muy elevado.

Las tasas de crecimiento son muy usadas en la práctica, tanto para resumir el comportamiento de un fenómeno en un período como para hacer proyecciones. Una pregunta que surge siempre es la de qué tasa o modelo es mejor para fines prácticos. Al respecto, debe señalarse que la medición del crecimiento y la proyección de los valores en el tiempo es, en general, un asunto complejo muy ligado a la circunstancia concreta y al tipo de proceso que se considera, y para el cual no hay procedimientos satisfactorios en todos los casos.

Exceptuando situaciones en las que es muy claro cuál modelo rige la evolución del fenómeno, en la mayoría, el modelo exponencial parece el más adecuado cuando se sabe que el crecimiento ocurre en la realidad como un proceso continuo; mientras que, en el caso de los fenómenos económicos, muchos de los cuales se analizan o se miden en período anuales, es frecuente utilizar el modelo geométrico. El modelo aritmético se prefiere corrientemente –por su sencillez– para interpolaciones y proyecciones referidas a períodos cortos.[11]

4.4. ALGUNOS NÚMEROS RELATIVOS DE USO FRECUENTE

Hay una serie de números relativos que se usan con bastante frecuencia en la vida diaria; algunos, como las tasas brutas de natalidad y mortalidad, ya fueron comentados, ahora se presentarán otros.

11. En las investigaciones y análisis de ciertos fenómenos, que operan con criterios periódicos, como procesos financieros o de inversiones, evaluación actuarial, con frecuencia se recurre al modelo exponencial porque su manejo matemático resulta más cómodo y flexible.

4.4.1. Porcentaje de población urbana

Para ilustrar el cálculo de este porcentaje se utilizarán los datos correspondientes al Censo de Población de Costa Rica del año 2000.

$$\frac{\text{Población urbana}}{\text{Población total}} \cdot 100 = \frac{2\,249\,414}{3\,810\,179} \cdot 100 = 59\,\%.$$

En el año 2000, 59 de cada 100 personas residentes en Costa Rica vivían en áreas definidas censalmente como urbanas.[12]

- Porcentaje de analfabetismo

  Este indicador educativo, por razones obvias, se investiga solo para la población de cierta edad en adelante. Indica la proporción de personas de 10 años y más que no saben leer ni escribir, es decir, que son analfabetas. A continuación, se presenta el cálculo con datos del Censo de Población del 2000.

$$\text{Porcentaje de analfabetismo} = \frac{\begin{array}{c}\text{Personas de 10 años y más}\\ \text{que no saben leer ni escribir}\end{array}}{\text{Población de 10 años y más}} \cdot 100 = \frac{144\,792}{3\,022\,391} \cdot 100 = 4,8\,\%.$$

  Su complemento es el porcentaje de alfabetismo, el cual fue, en el Censo del año 2000, de $100 - 4,8 = 95,2\,\%$.

4.4.2. Densidad de población

Se calcula dividiendo el número de habitantes de un área por la superficie de esta, esta medida se da habitualmente en kilómetros cuadrados. A continuación, se ilustra el cálculo para el caso de Costa Rica, en el año 2000.

$$\text{Densidad por kilómetro cuadrado} = \frac{\text{Población total}}{\text{Superficie de km}^2} = \frac{3\,810\,179}{51\,100} = 74,6\ \text{hab/km}^2.$$

4.4.3. Producto interno bruto per cápita

El producto interno bruto (PIB) es una medida del valor de la producción de bienes y servicios, en términos monetarios, generada por los factores de producción internos de un país en un periodo dado, usualmente un año. El PIB per cápita se obtiene dividiendo el PIB entre la población total del país, a mitad del período considerado. Aunque adolece de serias limitaciones de interpretación, es una medida ampliamente usada por los

12. Las oficinas nacionales de estadística (institutos, direcciones, etc.) tienen definiciones con las cuales realizan la calificaciones de las áreas en urbanas y rurales. Esas definiciones y los criterios usados deben consultarse en las publicaciones técnicas censales correspondientes.

economistas y aparece en los informes técnicos para comparar el desarrollo relativo de diferentes países y su crecimiento económico a través del tiempo.

A continuación, se ilustra su cálculo para el año 2009, empleando cifras del Departamento de Estadística Macroeconómica del Banco Central de Costa Rica y de población, proyectada por el INEC, para el 30 de junio del 2009.

$$\text{Producto interno bruto per cápita} = \frac{\text{PIB a precios de mercado, en dólares}}{\text{Población a mitad del año}}$$

$$= \frac{29\,303,8 \text{ millones de dólares}}{4\,509\,392} = \text{US } \$6894,8.$$

Calcular el PIB per cápita en dólares es una práctica común que busca facilitar la comparación con otros países.

Si se quiere expresar en colones, debe multiplicarse por el "tipo de cambio promedio", correspondiente al 2009, el cual fue de 573,29 colones por un dólar. Al hacerlo, se obtiene un PIB per cápita de 3 952 720 colones.[13]

4.4.4. Tasa de participación en actividad económica o tasa de actividad

Las estadísticas demográficas distinguen entre la población activa o **económicamente activa** y la población **no económicamente activa**. La primera está formada por quienes están disponibles para producir bienes y servicios e incluye, por lo tanto, a quienes trabajan y a los desocupados que buscan trabajo.[14] Incluye no solo a las personas que reciben algún tipo de remuneración, sino también a aquellas que participan como **trabajadores no remunerados;** por otra parte, la definición estadística no incluye a las **amas de casa** –a pesar de la importancia social que reviste su labor para la familia– porque su trabajo no es ofrecido en el mercado. La población no económicamente activa la forman el resto de las personas que forman parte de la activa, por ejemplo, las amas de casa (ya citadas), los pensionados, los rentistas, quienes se dedican solo a estudiar.

Para medir la participación de la población en la actividad económica, se utiliza la **tasa de actividad o tasa de participación en la actividad económica,** la cual indica, en general, la proporción de personas que forman parte de la población activa.

13. El tipo de cambio promedio lo calcula el Banco Central y corresponde a un promedio de los tipos de cambio efectivos entre los ingresos y egresos corrientes de la balanza de pagos.
14. Los que buscan trabajo pueden ser "cesantes" –tuvieron trabajo previamente– o personas que buscan trabajo por primera vez.

Según como se calcule la tasa de actividad puede ser bruta o neta. La **tasa bruta** se calcula dividiendo la población económicamente activa (PEA), en un momento dado, entre la población total en ese momento y multiplicando ese resultado por 100. La tasa neta se obtiene dividiendo la PEA entre la población total de 12 años y más, y multiplicando el resultado por 100. Se toma la población de 12 años y más porque censalmente, en el caso de Costa Rica, la participación en la actividad económica se investiga a partir de esta edad. Lógicamente, en otros países donde la participación se investiga a partir de otra edad (15 años o más, 16 años o más, por ejemplo), el divisor será la población de 15 años y más o de 16 y más, según corresponda.

Debe señalarse que, aunque por costumbre se denominan "tasas", estas expresiones no son más que simples proporciones expresadas en forma porcentual. Además, es evidentemente la tasa neta da una mejor idea del grado de participación en la actividad económica, pues relaciona los activos con las personas ubicadas en el tramo de edades que permite la participación. A continuación, se ilustra el cálculo de ambas tasas para mediados del 2008, utilizando los datos de la Encuesta Nacional de Hogares y Propósitos Múltiples (llamada ENAHO a partir del 2010), realizada por el INEC en julio de ese año.[15]

$$\text{Tasa bruta de actividad} = \frac{\text{PEA, julio del 2008}}{\text{Población total julio 2008}} \cdot 100 = \frac{2\,059\,613}{4\,533\,162} \cdot 100 = 45,4\,\%.$$

$$\text{Tasa neta de actividad} = \frac{\text{PEA, julio del 2008}}{\text{Población 12 años y más julio 2008}} \cdot 100 = \frac{2\,059\,613}{3\,631\,597} \cdot 100 = 56,7\,\%.$$

Estos valores indican que, en julio del 2008, participaban en la actividad económica un 45,4% de la población total y un 56,7% de la población de 12 años y más.

4.4.5. Tasa de desempleo o porcentaje de desocupados

Cuando se habla de la desocupación de un cierto país o región, generalmente se alude a la proporción de desocupados o desempleados dentro de la PEA; es decir, a las personas que no tienen trabajo, pero desean trabajar y buscan empleo. El porcentaje de desocupados –con gran frecuencia, llamado tasa de desempleo– se calcula dividiendo el número de personas desocupadas, entre la población económicamente activa y multiplicando el resultado por 100.

Debido a su naturaleza y a las necesidades que plantea su análisis, se acostumbra calcular varias medidas diferentes del fenómeno de la desocupación, pero cuando se habla de tasa de desempleo, normalmente se refiere a lo que técnicamente se denomina "Tasa de desempleo abierto".

15. Instituto de Estadística y Censos (INEC), Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples, julio del 2008; PRINCIPALES RESULTADOS, noviembre del 2008.

Seguidamente, se ilustra el cálculo con los datos de la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples, realizada por el INEC en julio del 2008:

$$\text{Tasa de desempleo abierto} = \frac{\text{Número total de desocupados, julio del 2008}}{\text{Población económicamente activa, julio 2008}} \cdot 100$$

$$= \frac{101\,905}{2\,059\,613} \cdot 100 = 4,9\,\%.$$

El valor obtenido indica que un 4,9% de la PEA estaba desocupada en julio del 2008. Note que la PEA está conformada por la suma de los ocupados y desocupados y, por lo tanto, el porcentaje de desocupados es una típica proporción.

4.4.6. Tasa de mortalidad infantil

La **tasa de mortalidad infantil (TMI)** es un indicador demográfico que mide la probabilidad de muerte de un nacido vivo durante su primer año de vida.

El que se tenga una medida de este tipo para el primer año de vida no debe sorprender, si se considera que este es uno de los períodos más críticos en la supervivencia del ser humano, y cuando se sobrepasa el primer cumpleaños, las probabilidades de supervivencia aumentan fuertemente, tan solo vuelven a bajar cuando la persona ha alcanzado edades relativamente elevadas.

Para calcular la TMI de un país o región, se emplea la siguiente fórmula:

$$\text{Tasa de mortalidad infantil} = \frac{\begin{array}{c}\text{Número de defunciones de menores}\\ \text{de un año ocurridas en el año Z}\end{array}}{\text{Total nacimientos vivos ocurridos año Z}} \cdot 1000.$$

En Costa Rica, según la información suministrada por el INEC, en su publicación *Estadísticas Vitales 2008*, hubo en ese año 75 187 nacidos vivos y se produjeron 673 defunciones de menores de un año. De acuerdo con estas cifras, la tasa de mortalidad infantil de Costa Rica, en el 2008, alcanzó a 9 por mil nacidos vivos.

$$\text{Tasa de mortalidad infantil, 2008} = \frac{673}{75\,187} \cdot 1000 = 8,95 = 9 \text{ por mil.}$$

La TMI es un indicador apropiado del nivel de salud de un país y está íntimamente ligado a los niveles de desarrollo económico y social. Por esta razón, es muy utilizada para evaluar la situación de los países, en estos aspectos, en un cierto momento y para apreciar la evolución en el tiempo y realizar comparaciones con otras regiones.

Aunque hay países que han alcanzado tasas mucho más bajas que las de Costa Rica, como Noruega e Islandia con 3 por mil, y en América Latina, Cuba y Chile con 4,7 o/oo y 7,9 o/oo, respectivamente, no cabe duda que Costa Rica está en una posición muy satisfactoria, ya que su TMI de 9 por mil en el 2008, la ubica a un nivel similar al del valor promedio de los países desarrollados.

4.4.7. Índice de masa corporal[16]

La obesidad está asociada con la diabetes, incremento de enfermedades cardiovasculares, hipertensión arterial y varios tipos de cáncer. Por ello, para orientar las políticas de prevención y tratamiento de estas enfermedades, es muy importante conocer el tipo de obesidad y el nivel de riesgo asociado a esta. Un indicador muy sencillo y útil para estos fines es el índice de masa corporal

El índice de masa corporal (IMC) relaciona el peso de una persona con su estatura. A pesar de que no distingue entre el componente grasoso y no grasoso de la masa corporal total, ha mostrado ser una herramienta útil para medir el grado de obesidad y evaluar el estado nutricional de las personas. La epidemia de obesidad y la mayor preocupación que existe en la sociedad moderna por la salud han contribuido al interés por este índice que, por otra parte, resulta simple de calcular y funciona muy bien tanto para hombres como para mujeres, en las diferentes edades. Su definición es la siguiente:

$$\text{Índice de masa corpora } = IMC = \frac{\text{Peso en kilogramos}}{(\text{Estatura en metros})^2}.$$

Ejemplo 4

Una persona pesa 71,5 kilogramos y mide 1,70 m. ¿Cuál es su índice de masa corporal?

$$IMC = \frac{71,5}{1,7^2} = 24,74.$$

Los expertos en nutrición y salud, así como ciertas organizaciones internacionales, han propuesto escalas en las que se indica la forma como deben interpretarse los valores del IMC en su relación con la obesidad y la condición de salud. Por ejemplo, la Organización Mundial de la Salud (OMS) ha propuesto la siguiente:

Índice de masa corporal	**Significado**
Menos de 18	Falta de peso
18,5 a 24,9	Normal o ideal
25 a 29,9	Pre-obeso
30 a 34,9	Obeso tipo 1
35 a 39,9	Obeso tipo 2
40 y más	Obeso tipo 3 (muy obeso)

Nota: estos valores son independientes de la edad y para ambos sexos.

16. Este índice también es llamado Índice de Quetelet, porque fue propuesto en el siglo XIX por el científico belga L. A. J. Quetelet, quien fue uno de los fundadores de la Estadística.

Existe otro tipo de números relativos de gran utilidad práctica, uno de ellos son los números índices. Por su importancia, se les dedica el apartado 4.6 de este capítulo.

4.5. ERRORES FRECUENTES EN EL USO DE NÚMEROS RELATIVOS

En la práctica, cuando se utilizan cifras relativas, es frecuente cometer errores en su interpretación. Estos errores tienen diferentes orígenes y naturaleza. Seguidamente, se hace referencia a los más corrientes:

4.5.1. Errores originados en la forma de presentación o anotación

Una fuente de errores es la forma como se presentan o se anotan los números relativos. Así, en el caso de las tasas vitales, en ocasiones se utiliza el símbolo 0/00 para indicar que están dadas por "mil"; en la práctica, sin embargo, con frecuencia algunas personas creen que se trata de un porcentaje o, aún más, que corrijan el símbolo, tachándolo y escribiendo %. Por ello, resulta muy adecuado, según sea el auditorio a quien se dirija la publicación, utilizar en lugar de 0/00 la expresión "por mil".[17]

Otro error común es tomar cifras relativas como si se trataran de números absolutos. La mayoría de veces, en el título del cuadro, se indica que se trata de porcentajes, pero en el contenido no se escribe el símbolo %. Debido a esto, después de un rato, el lector empieza a creer que se trata de datos absolutos. Por ello, una buena práctica es escribir los porcentajes con un decimal 34,8, por ejemplo, ya que así el lector, aunque no sepa de qué se trata, no confundirá los porcentajes con valores absolutos y tratará de investigar en el título del cuadro o en los encabezados cómo están expresados los números.

4.5.2. Confusión con respecto a la base

Constituye, quizás, la fuente de error más frecuente en el uso de porcentajes y ya fue mencionada al principio de este tema. Los dos ejemplos siguientes tienen por objeto dejar lo más clara posible esta cuestión.

17. Un hecho que influye en estas confusiones es que la mayoría de las cifras relativas se dan en porcentajes, entonces, las personas tienden a creen que cualquier cifra relativa se da en porcentajes. Esto lleva a que, aún profesionales, interpreten la tasa de mortalidad como número de muertes por cada 100 nacidos vivos, aunque su definición es por mil nacidos vivos.

Ejemplo 5

En una ciudad, el jefe de la policía afirmó que, con la creación de las comisarías de barrio, los asaltos a residencias particulares habían disminuido en un 125%. Esta reducción, por supuesto, es imposible, ya que un número, a lo máximo, puede disminuirse en un 100%. Al ser revisadas las cifras absolutas, se encontró que el error provenía del hecho de que, al comparar las cifras (900 en el año anterior a la creación de las comisarías de barrio y 400 en el año de establecimiento), el jefe de la policía había dividido la reducción: 500, entre esta última cifra:

$$\frac{500}{400} \cdot 100 = 125\,\%.$$

En realidad, la reducción fue del 55,8%.

$$\frac{500}{900} \cdot 100 = 55,8\,\%.$$

◇◇

Ejemplo 6

Un profesor universitario afirmó en su clase que, contrario a una creencia generalizada, la desocupación afectaba un poco más a los hombres que a las mujeres. Para apoyar su afirmación, indicó a los alumnos que, del total de desocupados registrados por la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples del 2008, un 53% eran hombres y un 47% mujeres.

En este caso, el problema radica en que, para llegar a una apreciación correcta de la importancia relativa de la desocupación dentro de cada sexo, es necesario comparar el número de hombres desocupados y de mujeres desocupadas con el volumen de la población económicamente activa masculina y femenina. Al hacerse esas relaciones, se encontró que la proporción de hombres desocupados alcanzaba un 4,2% y la de mujeres 6,2%, estas cifras llevan a una conclusión contraria a la expresada por el profesor universitario. En realidad, el profesor pudo haber afirmado, y estar en lo cierto, que una mayoría de los desocupados son hombres (53%).[18]

◇◇

4.5.3. Cálculo de proporciones o razones basadas en un número pequeño de casos

La confiabilidad de un número relativo depende en mucho del número de casos en las que se base. Así, por ejemplo, si en un país hay dos personas graduadas en Física nuclear y una de ellas es una mujer, sería totalmente inadecuado (y engañoso) afirmar que un 50% de los graduados en Física nuclear del país son mujeres. En realidad, para que una

18. Ver: "Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples, julio del 2008, PRINCIPALES RESULTADOS", p. 11.

tasa, razón o porcentaje sea confiable, la base debe ser razonablemente grande.[19] Una forma de ayudar a que las interpretaciones sean correctas o se realicen con la debida cautela es incluir, junto con los porcentajes, el número de casos que sirvieron de base para calcularlos. Esto se ilustra seguidamente.

A finales del 2008, el Ministro de la Presidencia, Rodrigo Arias, propuso públicamente la elección de una Asamblea Constituyente y la redacción de una nueva Constitución Política. En una encuesta de opinión de alcance nacional, realizada por teléfono en enero del 2009, se indagó ese tema mediante la pregunta: ¿En su opinión, para arreglar sus problemas, Costa Rica necesita una nueva Constitución? ¿Sí o no? Los resultados, para la muestra de 562 entrevistados, se resumen en el cuadro 4.2, detallados o "cruzados" por el partido de simpatía del entrevistado.

Cuadro 4.2

OPINIÓN SOBRE SI COSTA RICA NECESITA O NO UNA NUEVA CONSTITUCIÓN, SEGÚN PARTIDO POLÍTICO DE SIMPATÍA - ENERO 2009

	PARTIDO DE SIMPATÍA						
¿Necesita C.R. una nueva constitución?	**PLN**	**PUSC**	**PAC**	**ML**	**OTROS**	**NINGUNO**	**TOTAL**
Número entrevistados	248	43	43	11	8	209	562
Total	100	100	100	100	100	100	100
SÍ	56,5%	67,4%	69,8%	54,5%	37,5%	57,9%	58,5%
NO	32,7%	16,3%	18,6%	45,5%	62,5%	27,8%	29,2%
NS/NR	10,8%	16,3%	11,6%	0%	0%	14,4%	12,3%

Note que los porcentajes de las columnas cuarta y quinta se basan únicamente en 11 y 8 datos, por lo que su confiabilidad es muy baja. Para justificar por qué se elaboró un cuadro con esas limitaciones, conviene señalar que los interesados en la información pidieron ese detalle porque les interesaba saber si los simpatizantes del Movimiento Libertario y de los otros partidos mostraban alguna diferencia de opinión. Obviamente, se les informó de las limitaciones y se les alertó que la interpretación de esos porcentajes y su comparación con las otras cifras del cuadro debía hacerse con mucha cautela.[20]

19. En este caso, lo más apropiado y directo es decir que hay solo dos graduados en Física nuclear y uno de ellos es una mujer.

20. Este problema puede abordarse más apropiadamente recurriendo a las técnicas de prueba de hipótesis que se tratan en capítulo 14.

4.5.4. Errores al promediar números relativos

En ciertas oportunidades, es necesario promediar tasas, razones o proporciones correspondientes a diferentes zonas o grupos, a fin de lograr un valor para el conjunto. Al hacerlo, la tendencia de muchas personas es obtener un *promedio simple*, o sea, no tomar en cuenta la *base* de cada una de las razones o proporciones. Este conduce a valores erróneos, ya que el único caso en el cual el promedio simple lleva a un valor correcto es aquel en el que todos los números relativos promediados tienen la misma base. En realidad, cuando se promedian números relativos, debe usarse un promedio ponderado, en el cual cada número relativo es ponderado por su *base*. Considere un ejemplo.

Ejemplo 7

En una encuesta de opinión realizada en enero del 2009, en la cual se entrevistó a personas costarricenses de 18 años y más, se les preguntó si en la vivienda donde residían tenían computadora.

Los resultados indicaron que tenía computadora un 59,9% de los entrevistados de la Región Metropolitana de San José, un 40,1% de los residentes en el resto del Valle Central y un 31,1% de los entrevistados del resto del país.[21]

Con base en esa información, ¿cuál será la proporción, a nivel nacional, de entrevistados que residen en viviendas con computadora?

El promedio simple es: $\dfrac{59,9+40,1+31,1}{3}=\dfrac{131,1}{3}=43,7\,\%$.

Sin embargo, ese valor no es correcto, pues supone que el número de costarricenses adultos es el mismo en cada una de las zonas, lo que no es cierto. Por ello, es necesario ponderar por el número de adultos costarricenses en cada una de las zonas. Esto se hace a continuación, usando las cifras de adultos costarricenses arrojadas por la Encuesta de Hogares y de propósitos múltiples (EHPM) de julio del 2008.

21. Para efecto de la encuesta, la Región Metropolitana (RM) abarcó el Área Metropolitana de San José, el cantón Central de Alajuela, el de Cartago y el de Heredia, así como las zonas urbanas aledañas integradas al Área Metropolitana y a las ciudades capitales provinciales, como La Unión, Oreamuno y El Guarco en Cartago, y Barva, Santo Domingo, San Rafael, Belén y San Pablo en Heredia. El Resto del Valle Central (RVC) incluyó las zonas del Valle no comprendidas dentro de la Región Metropolitana; y el Resto del País, las tres provincias costeras, así como los cantones de Pérez Zeledón y Turrubares de San José, la Zona Norte, Orotina y San Mateo de Alajuela y el cantón de Sarapiquí.

Cuadro 4.3

CÁLCULO DE LA POBLACIÓN COSTARRICENSE DE 18 AÑOS Y MÁS RESIDENTES EN VIVIENDAS CON COMPUTADORA - ENERO, 2009

REGIÓN	Costarricenses de 18 años y más	Porcentaje reside en vivienda con computadora	Número residente en viviendas con computadora
Región Metropolitana	1 432 786	59,9%	858 239
Resto Valle Central	449 540	40,1%	180 266
Resto del país	904 732	31,1%	281 372
COSTA RICA	2 787 058		1 319 877

Estas cifras de población se tomaron de la EHPM de julio del 2008.

De acuerdo con las cifras arrojadas por la tabla anterior, se tiene que

$$\begin{array}{c}\text{\% de adultos residentes}\\ \text{en viviendas donde hay computadora}\end{array} = \frac{1\,319\,877}{2\,787\,058} \cdot 100 = 47,3\%.$$

Como puede apreciarse, la proporción correcta es 47,3%, valor superior al valor 43,7 dado por el promedio simple.

4.6. LOS ÍNDICES: CONCEPTO, TIPOS, INTERPRETACIÓN

Una situación frecuente en economía, administración de negocios, finanzas y en otros campos es la necesidad de medir el cambio ocurrido en un conjunto de variables entre dos períodos o comparar la magnitud de esas variables entre lugares o aún entre situaciones diferentes en un mismo momento. Las variables pueden ser precios, cantidades, producción, rendimiento escolar, nivel de desarrollo, cualidades, actitudes, etc. En estos casos, interesa un procedimiento que permita calcular un número de fácil comprensión, el cual resuma, en forma apropiada, el cambio y hacer las comparaciones, y ese procedimiento estadístico son los números índices o, en forma más abreviada, los índices.

Básicamente, un índice es un número que expresa el cambio relativo ocurrido entre un período o situación base y otro período o situación de interés específico, período de referencia, en un conjunto de variables.[22]

Los números índices constituyen una herramienta descriptiva muy útil y quizás una de las técnicas estadísticas más conocidas, utilizadas y comentadas en la vida diaria. En el caso concreto de Costa Rica, para dar un ejemplo, dos de los periódicos de mayor circulación incluyen, regularmente, información del comportamiento, en el día previo,

22. El término también se aplica, a veces, a series de valores absolutos, como sinónimo de indicador; así se hace referencia al consumo mensual o anual de energía eléctrica como un "índice de la actividad económica".

de los índices accionarios de la bolsa de Nueva York y las de otros centros financieros mundiales (ver ilustración 4.1, para uno de ellos). Además, cada inicio del mes, cuando el INEC da a conocer las cifras del Índice de Precios al Consumidor (IPC), los periódicos y los noticieros televisivos difunden y comentan ampliamente los resultados y sus implicaciones.

Figura 4.1. Periódico *La Nación*: información sobre los indicadores bursátiles de un grupo seleccionado de bolsas 28-3-2010

En adición a esto, es frecuente leer en la prensa o escuchar en la televisión que el índice de precios (o del "costo de la vida", como es llamado) ha subido dos puntos, que no ha variado en los últimos seis meses o, menos frecuente, que ha disminuido. Por otra parte, las demandas salariales y las luchas de los sindicatos están muy relacionadas con las variaciones en el índice de precios; es corriente, también, que el Ministro de Trabajo o el de Economía rechacen las pretensiones de aumentos salariales, aduciendo que el aumento del índice de precios (o de la "inflación") no justifica un incremento de la magnitud del solicitado. La importancia asignada al Índice de Precios se basa en la aceptación general de que el IPC mide el crecimiento de los precios de un grupo grande de productos y servicios consumidos por la familia y, por lo tanto, tiene una relación directa con la capacidad adquisitiva del dinero, por ende de los salarios.

Aunque los índices más conocidos son los de naturaleza económica, referidos a precios, producción, valores de las acciones y otras variables relacionadas con esta actividad, lo cierto es que los números índices se pueden calcular y aplicar a otras áreas de la sociedad; los demógrafos calculan índices para comparar las variaciones de la mortalidad a través del tiempo, entre regiones geográficas o grupos sociales; los psicólogos calculan algunos, como el cociente de inteligencia, y los sociólogos también construyen índices socioeconómicos con los cuales pretenden ordenar las familias o personas de acuerdo con su posición social y económica. Los educadores, por su parte, han construido índices para evaluar el funcionamiento y eficiencia de las instituciones educativas. Adicionalmente, en el caso del futbol, la FIFA ha desarrollado un índice que permite ordenar periódicamente las selecciones de los países de acuerdo con su rendimiento en encuentros oficiales y en juegos amistosos.

4.6.1. Índice de desarrollo humano (IDH)

Un ejemplo de un índice muy conocido en el campo del desarrollo social es el **índice de desarrollo humano (IDH)**, el cual fue elaborado por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo a inicios de la década de los noventa, con el propósito de ordenar los países de acuerdo con su grado de desarrollo, empleando variables de uso no tradicionales en la práctica económica. El índice combina tres dimensiones del desarrollo humano:[23]

Vida larga y saludable. Se usa como indicador la esperanza de vida al nacer.

Nivel de educación. Se usa como indicador un promedio de la tasa de alfabetización adulta (TA) y de la tasa bruta de matrícula combinada en educación primaria, secundaria y superior (TM). La ponderación de TA es un tercio y la de TM dos tercios, en consecuencia, el indicador del Nivel de Educación es igual a $\frac{1}{3}(TA)+\frac{2}{3}(TM)$.

Nivel de vida digno. Se usa como indicador el PIB per cápita del país convertido en dólares por medio de la PPA (paridad del poder adquisitivo) de la moneda de ese país.[24]

Cada uno de los componentes se expresa en un valor entre 0 y 1; luego, para calcular el índice general (IDH), se hace un promedio simple de los tres componentes. El IDH también varía entre 0 y 1. Los países se ordenan de acuerdo con el valor del índice.

El IDH se calcula cada año, pero los valores publicados se basan en información que tiene generalmente dos años de atraso. De acuerdo con la publicación del 2008, Costa Rica se ubica en el lugar 54 dentro del total de 182 países para los cuales se hace el cálculo. Esto la coloca dentro del grupo denominado de Alto Desarrollo Humano, y en la posición 6 dentro de América Latina, superada solo por Chile (44), Argentina (49), Uruguay (50), Cuba (51) y México (53).

23. "Informe Sobre el Desarrollo Humano Sostenible", Nota Técnica. Cálculo de los Índices, p. 107. PNUD, 1998.

24. La PPA es la cantidad de unidades monetarias locales que se necesitan para adquirir, dentro del país en cuestión, la misma cantidad de bienes que se comprarían en EE.UU. con un dólar estadounidense. Funciona como un tipo de cambio que permite estimar un ingreso per cápita que sea comparable internacionalmente.

4.6.2. Índices simples y compuestos

En rigor, el término índice debe ser aplicable solo a situaciones como las citadas, en las que interesa evaluar el cambio de un conjunto de variables, con respecto a un período o situación tomada como base, en las cuales se obtiene un número –usualmente un porcentaje– que resume el cambio promedio conjunto de esas variables. En la práctica, sin embargo, también se usa en una forma amplia, para indicar cualquier medición relativa en la que se compara una situación con otra, por lo general previa.

Dentro de este enfoque amplio y liberal del uso del término, en ocasiones se denomina número índice a mediciones muy simples, que se refieren únicamente a una característica; en otras, a valores correspondientes al resultado de un cálculo laborioso y complejo, que toma en cuenta un número alto de variables, las cuales reciben ponderaciones o valoraciones diferentes de acuerdo con la importancia que se les asigna. Este es el caso, por ejemplo, del índice de precios en cuyo cálculo se toman en cuenta los precios y la magnitud del consumo de un número grande de artículos y se utiliza una metodología bastante compleja para obtener el valor del índice.

Por lo anterior, resulta conveniente distinguir entre los **índices simples,** los cuales son relativos simples construidos para una sola variable, y los **índices compuestos,** que consideran un grupo de variables.

Obviamente, cualquiera que sea la situación, la palabra índice lleva implícita la noción de que se realizan comparaciones de las variaciones de un cierto fenómeno a lo largo del tiempo (o del espacio).

Ejemplo de una aplicación de un índice simple o relativo simple

Suponga que un periodista amigo suyo está interesado en analizar la **evolución del número de homicidios** en Costa Rica en las últimas décadas, para ese propósito consiguió en el INEC las cifras anuales de homicidios del período 1990-2009, incluídas seguidamente.

Cuadro 4.4

NÚMERO DE HOMICIDIOS REGISTRADOS ANUALMENTE EN EL PERIODO 1990-2009

AÑO	NÚMERO DE HOMICIDIOS	AÑO	NÚMERO DE HOMICIDIOS
1990	135	2000	241
1991	128	2001	243
1992	162	2002	236
1993	166	2003	285
1994	184	2004	251
1995	179	2005	310
1996	195	2006	318
1997	205	2007	334
1998	214	2008	484
1999	236	2009	525

Fuente: Estadísticas vitales 1990-2009, Unidad Estadísticas Demográficas, INEC.

Una forma de analizar esta evolución más fácilmente es expresando las cifras anuales de homicidios por medio de un índice que use como base el valor de un cierto año, por ejemplo, 1990, año inicial de la serie. Esto se hace dividiendo el número observado en cada uno de los años entre el correspondiente a 1990 y multiplicando el resultado por 100. Por ejemplo, el valor para 1999 se obtendría de la siguiente forma:

$$\frac{\text{Número de homicidios ocurridos en 1999}}{\text{Número de homicidios ocurridos en 1990}} \cdot 100 = \frac{236}{135} \cdot 100 = 174,8\,\%.$$

Esta cifra señala que en 1999 el número de homicidios fue un 75% mayor que en 1990 o, en otra forma, por cada 100 homicidios ocurridos en 1990, se produjeron 175 en el año 1999.

En forma similar, el índice para el 2009, último valor disponible de la serie es:

$$\frac{525}{135} \cdot 100 = 3,888 \cdot 100 = 388,9\,\%.$$

Lo anterior indica que el número de homicidios en el 2009 alcanzó 3,9 veces los ocurridos en 1990; siempre correcto, pero en lenguaje, quizás más periodístico: "entre 1990 y el 2009, el número de homicidios se cuadruplicó en Costa Rica".

Los valores obtenidos de esta forma reciben el nombre de relativos simples y responden a la pregunta: ¿Qué porcentaje del valor de 1990 representa el del año en consideración? Estos indican en qué proporción el valor de un cierto año o período es mayor o menor que el del seleccionado como año base (1990, en este caso). Debe notarse que, por la misma fórmula de cálculo del porcentaje, al año 1990 (año base) le corresponde un índice de 100, ya que:

$$\frac{135}{135} \cdot 100 = 1 \cdot 100 = 100\,\%.$$

Si los cálculos se realizan para todos los años disponibles y se presentan en forma tabular, se obtiene la serie de valores que aparece en el cuadro 4.5, tercera columna. El cálculo también puede hacerse utilizando otro año como base; lo cual se hace en la cuarta columna, donde se usa el año 2000, estos valores cumplen la misma función, pero deben interpretarse usando como base ese año.

Cuadro 4.5

CÁLCULO DE ÍNDICES CON BASE 1990 Y 2000 PARA EL NÚMERO ANUAL DE HOMICIDIOS ANUALES EN EL PERIODO 1990-2009

AÑO	HOMICIDIOS	ÍNDICE % de 1990	ÍNDICE % de 2000
1990	135	100,0	56,0
1991	128	94,8	53,1
1992	162	120,0	67,2
1993	166	123,0	68,9
1994	184	136,3	76,3
1995	179	132,6	74,3
1996	195	144,4	80,9
1997	205	151,9	85,1
1998	214	158,5	88,8
1999	236	174,8	97,9
2000	241	178,5	100,0
2001	243	180,0	100,8
2002	236	174,8	97,9
2003	285	211,1	118,3
2004	251	185,9	104,1
2005	310	229,6	128,6
2006	318	235,6	132,0
2007	334	247,4	138,6
2008	484	358,5	200,8
2009	525	388,9	217,8

Se obtiene una serie cronológica de números relativos, la cual facilita el análisis de la evolución del número de homicidios en el país.

Advierta, de igual manera, que ya no se tienen los datos del número real de homicidios, sino únicamente las relaciones entre esos números y una base común, que es la del año 1990. La función principal de un índice simple es convertir las magnitudes absolutas en una variable en términos relativos, esto permite realizar en forma muy simple comparaciones en el tiempo

La máxima utilidad de la serie de relativos o índices simples, sin embargo, se manifiesta cuando se desean hacer comparaciones entre varias series cronológicas. Supóngase ahora que el periodista desea comparar el comportamiento de los homicidios con la evolución de otros dos tipos de hechos violentos que cobran vidas humanas: los suicidios y las muertes por accidentes de transporte, tipo de muertes en las cuales es frecuente que estén involucrados elementos cercanos o asociados a otras formas de violencia.[25] Para ello, él obtiene información sobre estos hechos, la cual se resume en el cuadro 4.6, donde también aparecen los relativos simples para las tres series, tomando como base el año 1990. Para facilitar la comparación, se incluye además un gráfico lineal de las series, *(figura 4.2)*.

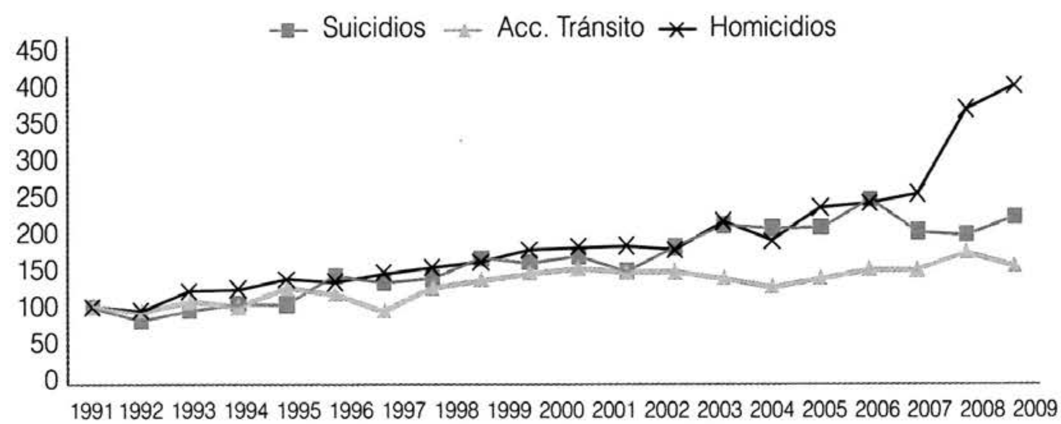

Figura 4.2. Gráfico de la evolución del número de homicidios, suicidios y muertes por accidentes de tránsito, 1990-2009, índices con base 1990=100

Del examen de los índices y del gráfico pueden obtenerse varias conclusiones de interés:

a) En términos generales, el número de muertes por accidentes de tránsito tiende a crecer –durante el período– más lentamente que las ocasionadas por suicidios y homicidios.

25. Una parte significativa de los accidentes de tránsito no son realmente "accidentes", sino hechos donde están presentes elementos como imprudencia, manejo peligroso, búsqueda de emociones fuertes, licor, desprecio por la vida de los demás y actitudes manifiestas de irrespeto a disposiciones o reglamentos de tránsito orientadas a reducir el riesgo de accidentes.

b) En el período 1990-2001, las tres series evolucionan en forma similar.

c) Del 2002 en adelante, el número de muertes por accidentes de tránsito se estabiliza, mientras que las debidas a suicidio y homicidios crecen en forma similar hasta el 2006.

d) Entre el 2007 y el 2009 se estabilizan los suicidios y se "disparan" los homicidios.

Cuadro 4.6

EVOLUCIÓN DEL NÚMERO DE HOMICIDIOS, SUICIDIOS Y MUERTES POR ACCIDENTES DE TRÁNSITO, 1990-2009. ÍNDICE BASE 1990=100

NÚMERO DE CASOS			ÍNDICES 1990=100		
AÑO	SUICIDIOS	ACC TRÁNSITO	Suicidios	Acc Tránsito	Homicidios
1990	159	465	100	100	100
1991	130	441	81,8	94,8	94,8
1992	153	495	96,2	106,5	120,0
1993	165	466	103,8	100,2	123,0
1994	164	580	103,1	124,7	136,3
1995	224	544	140,9	117,0	132,6
1996	210	441	132,1	94,8	144,4
1997	218	583	137,1	12,4	151,9
1998	258	628	162,3	135,1	158,5
1999	251	671	157,9	144,3	174,8
2000	263	696	165,4	149,7	178,5
2001	232	676	145,9	145,4	180,0
2002	282	677	177,4	145,6	174,8
2003	329	638	206,9	137,2	211,1
2004	322	587	202,5	126,2	185,9
2005	323	637	203,1	137,0	229,6
2006	380	693	239,0	149,0	235,6
2007	315	687	198,1	147,7	247,4
2008	308	795	193,7	171,0	358,5
2009	345	711	217,0	152,9	388,9

Nota: los datos absolutos de homicidios están en la tabla 4.5.

El ejemplo anterior se refiere a tres variables con sus respectivos índices calculados por separado, se trata, por lo tanto, de un índice simple. En la práctica, sin embargo, como ya se comentó, en muchas oportunidades se está más interesado en comparar las variaciones de un conjunto de variables durante un período. Para calcular el índice de precios al consumidor, por ejemplo, no basta conocer las variaciones en el precio de la leche, hace falta saber también qué pasó con los otros artículos de consumo básico: pan, huevos, arroz, frijoles, y las de los servicios como alquiler, transporte, etc.; conocer las variaciones en el precio de la ropa y de los zapatos, de manera que se obtenga un indicador de la variación general del nivel de precios. Además, se sabe que esos artículos se ponderan de acuerdo con la importancia que tienen para el consumidor, para ello se considera la cantidad consumida, la frecuencia de adquisición o, mejor, su importancia dentro del presupuesto familiar. Este tipo de situaciones lleva a los índices compuestos o ponderados.

Dada la importancia y uso que tienen los índices de precios, seguidamente se explica e ilustra el caso de los índices compuestos.

4.7. LOS ÍNDICES DE PRECIOS

Para simplificar la explicación del caso del índice de precios, suponga que una familia consume únicamente 5 artículos: arroz, aceite, sal, café y pan, y se dispone de los precios de esos bienes, en las unidades especificadas para el 2003, el 2006 y el 2009.

Cuadro 4.7
CONSUMO FAMILIAR DE CINCO ARTÍCULOS

ARTÍCULO	UNIDAD	AÑO BASE 2003	AÑO 1 2006	AÑO 2 2009
Arroz bolsa	2 kilos	400	600	1220
Aceite	1 litro	485	690	1100
Sal	Bolsa 500 gramos	90	140	200
Café	Bolsa 1 kilo	1170	2415	1730
Pan baguette	Corriente	200	320	400
Total		2345	4165	4650

Suponga, también, que la persona cabeza de la familia está interesada en conocer cómo han afectado los cambios de esos precios el costo de esa "canasta" de artículos que compra regularmente.

4.7.1. Agregado simple

Una forma muy sencilla de apreciar el cambio general del grupo de artículos es por medio de la suma de los precios de los cinco artículos en cada año y calculando luego un índice, para el cual se toma como base cero el año 2003.

Simbólicamente: índice de agregado simple de precios: $= \frac{\sum p_n}{\sum p_0} \cdot 100$.

- **Cálculo del índice**

Cuadro 4.8
SUMA DE LOS PERÍODOS

AÑO	PRECIOS	ÍNDICE
2003	2345	(2345/2345) · 100 = 100
2006	4165	(4165/2345) · 100 = 177,6
2009	4650	(4650/2345) · 100 = 198,3

La suma de los precios de los cinco artículos es, en el 2006, un 77,6% más alta que en el 2003 y en el 2009 un 98,3%. Por cada 100 colones pagados en el 2003, en el 2006 se debe pagar 178 colones y en el 2009, un total de 198 colones. Desde esta perspectiva, los precios aumentaron un 78% entre el 2003 y el 2006, y un 98% entre el 2003 y el 2009.

Este índice, que se basa en agregados simples de precios, por lo general no es satisfactorio. Una desventaja importante es que su valor depende fuertemente de las unidades utilizadas para recolectar los precios; entre mayores son las unidades que se emplean, mayores los precios y mayor peso del precio en la suma y en el índice. En el ejemplo en consideración, si se tomara el precio del café por bolsa de medio kilo y no por kilogramo, el resultado obtenido sería diferente. Igual, si se decidiera usar el precio de la sal por saco de 100 kilogramos, este valor dominaría totalmente el índice y sería muy diferente del obtenido arriba.

Otra desventaja radica en el hecho de que el sistema de cálculo da la misma jerarquía a todos los precios y no toma en cuenta el monto que se consume de cada bien, ni su importancia dentro del presupuesto familiar. Debido a esto, una duplicación, por ejemplo, en el precio del café, recibe el mismo peso que una en el arroz de un consumo mucho mayor.

Adicionalmente, los precios más altos tienden a dominar el índice. Una duplicación del café, que posee un precio alto, tiene mucho más peso en la suma y en el índice, que una duplicación de la sal, con un precio bajo

4.7.2. Promedio simple de relativos

Un primer paso para mejorar la medición del cambio en los precios, eliminando el efecto de las unidades usadas y controlando la magnitud natural de los precios, es calcular los relativos de precios de cada artículo, con base 2003, y luego hacer un promedio simple de esos relativos para obtener el índice global, tal como se indica seguidamente:[26]

Cuadro 4.9

CÁLCULO DEL ÍNDICE USANDO EL MÉTODO DE PROMEDIO DE RELATIVOS SIMPLES

	PRECIOS POR AÑO			RELATIVOS SIMPLES POR ARTÍCULO		
	2003	2006	2009	2003/2003	2006/2003	2009/2003
ARTÍCULO	0	1	2	$\frac{p_0}{p}$	$\frac{p_1}{p}$	$\frac{p_2}{p}$
Arroz	400	600	1220	100	150,0	305,0
Aceite	485	690	1100	100	142,3	226,8
Sal	90	140	200	100	155,6	222,2
Café	1170	2415	1730	100	206,4	147,9
Pan	200	320	400	100	160,0	200,0
Suma $\left[\sum p_n\right]$	2345	4165	4650			
$\left[\sum \frac{p_n}{p_0}\right]$				500	814,2	1101,9
Número de artículos				5	5	5
ÍNDICE				100,0	162,8	220,4

De acuerdo con este enfoque, la "canasta" aumenta 63% entre 2003 y 2006, y 120% entre el 2003 y el 2009. También, se puede decir que por cada 100 colones pagados en el 2003, se debieron pagar 163 y 220 colones, respectivamente, en el 2006 y el 2009.

Esta solución, sin embargo, equivale a dar a todos los precios una misma importancia, lo cual no es correcto. Se hace necesario, entonces, utilizar algún sistema de **ponderación** para asignar a cada uno un peso o ponderación que refleje la importancia en el consumo familiar.[27]

En resumen, para lograr que cada producto tenga una influencia "razonable" en el índice, es conveniente usar una suma ponderada de precios. En la práctica, uno de los criterios más usados de ponderación es la cantidad consumida del producto.

26. Note que los relativos de precios son, en realidad, índices simples para cada uno de los artículos.
27. La operación de "ponderar" consiste en multiplicar cada valor de la variable –cada artículo, en este caso– por un coeficiente numérico que refleja su importancia dentro del conjunto. Para mayor detalle, ver Media aritmética ponderada en el capítulo 8.

4.7.3. Índices de precios ponderados

En la siguiente tabla, se presentan los precios de los artículos del ejemplo que se ha venido comentando; se agrega la cantidad mensual de consumo de cada uno de ellos. Se usa la letra p para indicar precio y la q para cantidad. En la última línea aparece la suma de productos de cada precio, por cantidad consumida, para cada uno de los años: $\sum p_n q_n$.

Cuadro 4.10

EJEMPLO DE ÍNDICES DE PRECIOS PONDERADOS

	0-2003		1-2006		2-2009	
Artículo	P_0	q_0	P_1	q_1	P_2	q_2
1. Arroz	400	2	600	4	1220	4
2. Aceite	485	3	690	3	1100	3
3. Sal	90	2	140	2	200	2
4. Café	1170	4	2415	4	1730	3
5. Pan	200	28	320	30	400	35
	$\sum p_0 q_0 = 12715$		$\sum p_1 q_0 = 22170$		$\sum p_2 q_0 = 24260$	

Con esta información, se calculan los índices ponderados de precios, usando como ponderación el consumo de los artículos. Hay varias formas de hacerlo, se ilustran dos de las más conocidas: la de Laspeyres y la de Paasche.

Fórmula de Laspeyres. Recuerde que el jefe de familia está preocupado por el efecto que tiene el cambio en los precios sobre su presupuesto. Suponga que decide tomar, como punto de referencia, las cantidades consumidas en el 2003 y determinar cómo ha ido variando el costo de esa "canasta básica" con respecto a ese año. Para ello, simplemente procede a calcular el gasto en el cual incurriría cada año, adquiriendo, a los precios de ese año, las mismas cantidades consumidas en el año base; esto se logra a través de la multiplicación de la cantidad consumida por el precio de cada artículo y realizando la suma. El resultado de este ejercicio aparece en la última línea de la tabla anterior.

A partir de esas sumas, se procede a calcular el índice para cada uno de los años:

AÑO	SUMA GASTADA	ÍNDICE
0-2003	$\sum p_0 q_0 = 12\,715$	$(12\,715/12\,715) \cdot 100 = 100$
1-2006	$\sum p_1 q_0 = 22\,170$	$(22\,170/12\,715) \cdot 100 = 174{,}4$
2-2009	$\sum p_2 q_0 = 24260$	$(24\,260/12\,715) \cdot 100 = 190{,}8$

Capítulo 4 LOS NÚMEROS RELATIVOS

Este índice contesta a la pregunta: "¿cuánto cuesta, en el año de interés (2006, en este ejemplo), comprar lo mismo que se compraba en el año base (2003)?". Como la cantidad comprada de cada artículo es la misma que en el 2003, el cambio observado debe atribuirse, exclusivamente, a cambios en los precios.

Por lo tanto, por cada 100 colones que se pagaban en el 2003, deben pagarse 174 colones, en el 2006, y 191, en el 2009. En consecuencia, comprar esa "canasta" de bienes -la del año base- cuesta 74% más en el 2006 y 91 y más en el 2009.

El procedimiento de cálculo fue propuesto por **Etienne Laspeyres** y su fórmula general es

$$I = \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot 100 \text{ FÓRMULA DE LASPEYRES}$$

Donde:

p_n representa los precios en el año de interés.

p_0 y q_0 los precios y cantidades en el año base.

Σ es el símbolo de sumatoria, indica que deben sumarse los productos.

$(p \cdot q)$ para todos los artículos incluidos en el índice.

Fórmula de Paasche. El índice de Laspeyres se basa en el supuesto de que la "canasta" de bienes incluidos en el índice se mantiene fija con las características del año base. En el ejemplo que se ha venido exponiendo, se considera que la familia sigue consumiendo, en todos los años, 4 kilos (2 bolsas) de arroz mensualmente, tres litros de aceite, 28 baguettes, etc. Este supuesto es poco realista y en él reside la principal limitación de la fórmula de Laspeyres. Conforme pasa el tiempo, la "canasta" del período base se vuelve atípica porque las familias pueden decidir consumir más de ciertos artículos y menos de otros, por cambios en los precios de esos artículos o en similares, mejoramiento en su nivel de ingresos, variaciones en el tamaño de la familia o simplemente por cambios en los gustos y aún pueden consumir nuevos productos que aparecen en el mercado. Conforme ocurren estas variaciones en el patrón de consumo de los diferentes bienes, el índice va perdiendo validez. Por esto, la "canasta" debe ser revisada periódicamente para actualizarla en lo referente a cantidad consumida que se usa como ponderaciones.

Un método alternativo para enfrentar este problema fue propuesto por Paasche, consiste en utilizar, como ponderaciones de los precios, no las cantidades consumidas en el año base, sino las del año de interés (año actual); con este procedimiento, la canasta se mantiene al día y la familia puede comparar el costo de su "canasta" actual con su costo a los precios del período base. La fórmula de cálculo es la siguiente: $I = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} \cdot 100$

FÓRMULA DE PAASCHE, donde el subíndice 0 indica el año base y el subíndice n el año de referencia.

Seguidamente, se ilustra el cálculo con los datos del ejemplo que se ha venido comentando:

Cálculo con la fórmula de Paasche

Cuadro 4.11
CÁLCULO CON LA FÓRMULA DE PAASCHE

	0-2003		1-2006		2-2009	
ARTÍCULO	p_0	q_0	p_1	q_1	p_2	q_2
1. Arroz	400	2	600	4	1220	4
2. Aceite	485	3	690	3	1100	3
3. Sal	90	2	140	2	200	2
4. Café	1170	4	2415	4	1730	3
5. Pan	200	28	320	30	400	35
ARTÍCULO	p_0q_0	p_1q_1	p_2q_2	p_0q_1	p_0q_2	
1. Arroz	800	2400	4880	1600	1600	
2. Aceite	1455	2070	3300	1455	1455	
3. Sal	180	280	400	180	180	
4. Café	4680	9660	5190	4680	3510	
5. Pan	5600	9600	14000	6000	7000	
	12715	24010	27770	13915	13745	

ÍNDICE

$$2003: \frac{\sum p_0q_0}{\sum p_0q_0} = \frac{12715}{12715}\cdot 100 = 100.$$

$$2006: \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} = \frac{24010}{13915}\cdot 100 = 172,5.$$

$$2009: \frac{\sum p_2q_2}{\sum p_0q_2} = \frac{27770}{13745}\cdot 100 = 202,0.$$

Los resultados señalan que las cantidades compradas de cada bien, en el año 2006 (año 1), resultan, en promedio, un 72,5% más caras de lo que habrían costado a los precios del año 2003 (año base), y las adquiridas en el año 2009 (año 2) son un 102% más altas de lo que hubiera costado adquirirlas a los precios del año base.

Las ventajas y desventajas comparativas de los dos métodos se presentan en el cuadro 4.12.

Cuadro 4.12

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LOS DOS MÉTODOS

	VENTAJAS	DESVENTAJAS
LASPEYRES	1. Solo requiere datos de consumo del año o período base 2. Los cambios en los índices solo pueden ser atribuidos a cambios en los precios	1. No refleja los cambios en los hábitos de consumo 2. Tiende a dar más peso a los artículos cuyos precios suben[28]
PAASCHE	1. Al usar como ponderaciones los consumos de cada período o año de referencia, se reflejan los cambios en los hábitos de consumo	1. Requiere recoger datos de consumo para cada año o período de referencia 2. Como utiliza las cantidades de consumo de los diferentes años, es imposible asignar los cambios del índice solo a los cambios en los precios 3. Puede dar más peso a los artículos cuyos precios bajan[29]

Es importante señalar que, debido a su fórmula de cálculo, la cual se fundamenta en las consumos del año base y de cada uno de los años de referencia, el método de Paasche tiene la desventaja de que solo se pueden establecer comparaciones legítimas entre cada año y el año base, pero no entre los otros años.

En la práctica, el método de Laspeyres es más usado, en especial porque: a) solo requiere las cantidades consumidas del año base y b) su cambio puede atribuirse solo a variaciones en los precios.

4.8. ÍNDICES DE PRECIOS EN COSTA RICA

La construcción de un índice requiere resolver varios problemas fundamentales que implican aspectos teóricos, metodológicos y detalles prácticos. Para comentarlos, se toma como referencia el caso de los índices de precios; sin embargo, esos inconvenientes se presentan también en otros tipos de índices. Los siguientes son algunos los problemas que requieren mayor atención y exigen más esfuerzo al construir un índice de precios.

28. Esto se debe a que, al aumentar el precio de un artículo, su consumo disminuye; sin embargo, el precio aumentado sigue teniendo el peso observado en el año base.
29. Si un precio baja la cantidad que se consume, tiende a aumentar, pero el precio que se redujo sigue teniendo el mismo peso que en el año base.

4.8.1. Selección del período base

El período base de un índice debe escogerse cuidadosamente para evitar que su evolución resulte poco clara y surjan resultados o interpretaciones engañosas. Por ello, debe ser un período que pueda ser considerado "típico, normal o promedio" a la luz de la experiencia histórica, y permita valorar, debidamente, los cambios que ocurran. En algunos casos, cuando resulta complicado seleccionar un período, se utiliza un promedio de varios años consecutivos como base. Si el valor base de un índice de precios corresponde a un período de euforia económica e inflación, y es muy alto, el índice aparecerá deprimido de forma crónica porque la mayor parte de los valores caerían muy por debajo de él; si es muy bajo, se dará la situación contraria. Otro punto importante es que el período base debe ser relativamente reciente, de manera que la canasta de bienes y servicios corresponda al consumo actual y el índice sea más fácil de interpretar, ya que los usuarios recuerdan mejor las condiciones del período base.

Es importante señalar que una base satisfactoria durante un tiempo puede no serlo varios años después, y sea necesario cambiar por una más reciente. Esto se debe a varios factores: i) los artículos consumidos pueden cambiar de tal forma que existen muy pocos que sean comunes a ambos períodos; ii) la dispersión de los precios se hace tan alta que ninguna forma de resumirlos resulta confiable; y iii) muchos productos mantienen su nombre, pero su calidad cambia marcadamente con el tiempo.

4.8.2. Selección de los artículos que deben ser incluidos en el índice

En general, los índices de precios son índices agregados, es decir, tratan de reflejar las variaciones del **nivel general de precios** de un país o región. Sin embargo, es obvio que no se pueden estudiar los precios de los miles de bienes y servicios disponibles en el mercado. Por ello, se miden los cambios en los precios de un grupo seleccionado de artículos que se consideran representativos de los diferentes tipos de artículos consumidos. La forma para elegir estos artículos representativos reviste importancia primordial y requiere mucha experiencia, análisis y reflexión, además, es esencial disponer de los resultados de una encuesta estadística aplicada a la población de familias del país o región para la cual se elabora el índice, y así informe sobre ingresos, hábitos de consumo y gasto de esas familias. La encuesta permitirá conocer cuáles bienes y servicios se consumen y con qué intensidad; por consiguiente, cuáles deben ser incluidos en el índice y qué ponderaciones deben recibir.[30]

30. En la práctica, conforme pasa el tiempo, los bienes y servicios, aunque mantengan el nombre, pueden cambiar en su naturaleza, presentación y calidad. Por ello, la canasta básica requiere actualizaciones periódicas para mantener la validez del índice; esto implica realizar nuevas encuestas de ingresos y gastos familiares.

4.8.3. Elección de la fórmula de cálculo del índice

Según lo comentado, se han propuesto numerosas fórmulas para el cálculo de los índices de precios, cada una privilegia determinados criterios y utiliza un sistema de ponderación específico. En la selección de la fórmula para aplicar en una situación concreta, se consideran factores como los siguientes: i) el propósito o uso del índice; ii) si el consumo de los artículos que se incluyen en el índice están cambiando mucho en su importancia relativa dentro del consumo familiar o si los precios de los artículos están sufriendo variaciones más marcadas que el conjunto de precios; iii) si interesa la comparación, uno con otro, de los índices de la serie de años, o solo relacionar el índice de cada año con el base; y iv) los recursos disponibles para la actualización de la canasta y la elaboración de los números índices: por ejemplo, seleccionar, la fórmula de Paasche entraña una revisión periódica de las ponderaciones de los artículos que conforman el número índice.

4.8.4. Ponderaciones o pesos que recibirán los artículos

Para que el índice refleje, con mayor validez, la variación general de los precios, se incorpora en el cálculo la importancia relativa que cada artículo tiene en el presupuesto familiar. Esto se logra asignando ponderaciones a los precios, las cuales pueden ser las cantidades consumidas del año base, las del año de referencia o un juego de ponderaciones definidas con algún otro criterio, como sería, por ejemplo, un promedio de las cantidades del año base y de los años dados.

La selección de las ponderaciones está muy ligada al tipo de fórmula de cálculo elegido y es un problema importante, en especial porque se sabe que los patrones de consumo cambian con el tiempo y las ponderaciones apropiadas en un cierto momento no lo son después. Además, la selección depende también de la forma como se percibe el índice: así, si se cree que debe medir el costo variable de un conjunto fijo de artículos, se usarían como ponderaciones las cantidades consumidas de años base y una fórmula del tipo Laspeyres. Si se privilegian las cantidades de consumo actual, se emplea una fórmula tipo Paasche. En la práctica, las ponderaciones usualmente se derivan de los resultados de encuestas estadísticas de ingresos y gastos.

4.8.5. Procedimiento de recolección de la información para el cálculo regular del índice

Para que cumpla sus objetivos, un índice de precios debe calcularse periódicamente, casi siempre, en forma mensual. La institución encargada de confeccionarlo debe, por lo tanto, establecer un sistema de recolección de precios. Este sistema incluirá una encuesta mensual a una muestra estadística representativa de los establecimientos donde los consumidores compran los artículos que forman parte del índice, en este caso se recolectan los precios de venta al por menor de esos productos.

4.8.6. Cambios de calidad y productos nuevos

Otro problema que surge durante la vigencia de un índice y que puede afectar su validez y la interpretación de sus resultados, con los cambios que ocurren en la presentación y calidad de los productos, aún cuando mantenga su nombre, y en la aparición de productos nuevos que sustituyen los existentes. También pueden afectar ciertas prácticas comerciales como las ofertas, pues producen bajas temporales de precios. Las oficinas de estadística que elaboran los índices de precios tienen plena conciencia de estos problemas, y establecen criterios y procedimientos para incluir esos nuevos productos en el índice y considerar apropiadamente las ofertas. Cuando hay gran cantidad de modificciones y reflejan un cambio fundamental en la estructura del consumo de las familias, la solución es llevar a cabo un estudio para plantear una nueva base del índice.

El problema de los cambios en la calidad del bien o servicio en el tiempo es de especial importancia, porque se relaciona con la validez del índice; por ello es útil comentarlo.

Suponga que el costo de transporte, "el pasaje", de una ciudad capital de provincia a la capital del país ha variado en los últimos 30 años en la forma indicada abajo, donde también aparecen los relativos de precios (índices) con base 1980:

Cuadro 4.13
COSTO DEL PASAJE DE TRANSPORTE

AÑOS	Precio pasaje en colones	ÍNDICE 1980=100	Salario mensual promedio colones obrero calificado	ÍNDICE 1980=100
1980	400	100,0	85 714	100,0
1990	450	112,5	114 286	133,3
2000	600	150,0	171 429	200,0
2010	850	212,5	200 000	233,3

¿Qué señala este índice? La variación histórica del precio del pasaje a la capital desde la provincia, usando como período base el precio en colones en 1980. Sin embargo, su interpretación no es tan simple como parece; esto se aprecia al tratar de responder a las preguntas siguientes: ¿Se ha incrementado el precio del pasaje entre 1990 y el 2010? Nominalmente, sí; no cabe duda que ahora se paga más del doble que en 1980. Pero, ¿no son mejores y más cómodos los buses?, ¿no es ahora más rápido el servicio?, antes se utilizaba una carretera de segundo orden y ahora una moderna autopista. ¿No tienen ahora los buses aire acondicionado? Entonces, ¿ha subido realmente el precio del pasaje?

Obviamente, con el valor agregado en comodidades y velocidad, el tipo de servicio prestado en el 2010 puede ser de mayor calidad al ofrecido en 1980; entonces, el punto está en decidir si se está pagando más por un servicio de mejor calidad o si el aumento se debe simplemente a un cobro mayor por el mismo servicio o uno similar. El análisis es un poco más complejo si se compara el costo del pasaje con el salario mensual que se pagaba en 1980 a un obrero calificado, cabría preguntarse ¿cómo ha evolucionado el salario del obrero calificado y cómo se compara con la evolución del "pasaje"? Las cifras mostradas en las columnas cuarta y quinta de la tabla señalan que el salario promedio aumentó un poco más que el precio del pasaje (índice de 233 vs. 212). Esto sugiere que, en términos reales, "el pasaje" no ha aumentado en los últimos 30 años y, más bien, puede estar un poco más barato por las mejoras en el servicio.[31]

No obstante, limitaciones como las comentadas, no cabe duda que los índices brindan un instrumento muy útil para la evaluación y análisis de series estadísticas expresadas en unidades monetarias. El índice, por supuesto, no refleja con exactitud los cambios en los precios de cada artículo, ni la situación de una familia específica, pero traza con precisión razonable los movimientos generales del nivel de precios. Bajo esta perspectiva, pueden ser utilizados para hacer frente a muchos problemas prácticos.

4.9. USO DE LOS ÍNDICES DE PRECIOS

El Índice de Precios al Consumidor (IPC) abarca un gran número de bienes y servicios con precios expresados en valores correspondientes a diferentes unidades, y los combina en una serie de número índices que permite describir el nivel de precios en una forma sintética y seguir la evolución de sus cambios en el tiempo.

Al convertir los datos a índices, resulta más fácil seguir la tendencia de grandes masas de datos sobre precios y consumo, de la inflación y otras variables económicas, por parte del gobierno, las autoridades económicas y grupos interesados. Esta característica los convierte en instrumentos útiles para ajustar series de datos de ventas, de presupuesto, de salarios, de ingresos gubernamentales y otras transacciones, de acuerdo con los cambios en el poder adquisitivo de la moneda. Seguidamente, se comentan varios de los usos más comunes de los índices de precios.

31. Por los servicios agregados –aire acondicionado, asientos más cómodos, menos tiempo para el recorrido– técnicamente, el "pasaje de 1980" es un artículo diferente al "pasaje del 2010", no son comparables.

4.9.1. Medición y seguimiento del poder adquisitivo de la moneda

Históricamente, los índices de precios aparecieron con el propósito de medir los cambios en el "poder de compra de la moneda", en su "poder adquisitivo". Implícita en esta preocupación estaba la idea de que existía un nivel de precios, el cual variaba inversamente con el poder de compra de la moneda.

Desde esta perspectiva, si el nivel de precios sube el valor de la moneda –su poder adquisitivo– se reduce y a la inversa si se reduce; en consecuencia, su poder de compra de la moneda, en un cierto momento, puede expresarse como el recíproco del índice de precios (IPC) vigente:

$$\text{Poder de compra del dinero} = \frac{1}{\text{Índice de precios}} \cdot 100\,.$$

Debido a esta propiedad, el IPC es usado como un indicador del ritmo de inflación en una economía.[32] La tasa de inflación se mide por el cambio en el IPC de un año al otro. Simbólicamente,

$$\text{Tasa de inflación de un año a otro} = \frac{IPC_t - IPC_{t-1}}{IPC_t} \cdot 100\,.$$

Para ilustrar este cálculo, se incluye información del IPC para diciembre de cada año del periodo 2005 a 2009, junto con el cálculo del porcentaje de inflación anual que señalan esas cifras, obtenido a partir de la fórmula indicada.

Cuadro 4.14

INFORMACIÓN DEL IPC ÁRA DICIEMBRE DE CADA AÑO, 2005-2009

Periodo	ÍNDICE 1	Aumento	% de inflación
Dic-05	94,09		
Dic-06	102,96	8,87	9,4
Dic-07	114,09	11,13	10,8
Dic-08	129,95	15,86	13,9
Dic-09	135,21	5,26	4,0

* Base Julio 2006=100

Fuente: INEC, Unidad de Índice de Precios

El nivel de inflación, que se mantuvo creciendo en el período 2006-08, sufre una fuerte baja en el 2009; puede inferirse, por lo tanto, que la pérdida de poder adquisitivo del colón, se moderó significativamente en el 2009.

32. Por inflación se entiende un aumento sostenido del nivel general de precios en una economía, se mide usualmente con el IPC. La deflación es el fenómeno contrario.

Es importante señalar que los cambios en el IPC son, a menudo, tomados por los medios de comunicación y por mucha gente como una medida del "costo de vida". Esta práctica, sin embargo, no es correcta. En realidad, el IPC tiene ciertas limitaciones, las cuales impiden medir el costo de la vida, entre ellas: no considera ciertos gastos como los que se hacen en impuestos, los cambios en la calidad de los bienes y servicios ni otros, como la mayor variedad de productos disponibles o la tendencia a exigir menos horas de trabajo como jornada regular. [33]

4.9.2. Cálculo de valores reales o deflactados[34]

Cuando los valores de una serie están expresados en una cierta moneda (colón, córdoba, pesos, bolívares, etc.) que ha sufrido cambios en su poder adquisitivo, es difícil comparar y sacar conclusiones válidas acerca del comportamiento del fenómeno de interés. La dificultad se hace mayor cuanto más sean las variaciones ocurridas. En estas situaciones, es necesario realizar algún ejercicio para eliminar los efectos de los cambios monetarios y tener una visión más "real" del comportamiento de la serie.

Suponga que una politóloga está comparando los gastos de los gobiernos actuales con los de la década de los noventa. Al revisar las cifras, probablemente concluya que ha aumentado desproporcionadamente, que las instituciones públicas cada vez gastan más, etc.; estas conclusiones, sin embargo, podrían no ser válidas o, al menos, ser exageradas, debido a que ella no está dando la debida importancia a los aumentos ocurridos en el nivel de precios en el período. No cabe duda de que el monto del gasto público ha aumentado sostenidamente, pero también es cierto el incremento los precios de los bienes y servicios que el gobierno compra (materiales de oficina, gasolina, salarios de funcionarios, materiales de construcción, electricidad, etc.). Una pregunta legítima es: ¿está gastando mucho más el gobierno o es que ahora todo le cuesta más? Recuerde que los gastos de 1995, por ejemplo, están expresado en colones de ese año, en cambio los del 2010, se expresan en colones del 2010, los cuales, debido a la inflación, tienen un poder adquisitivo mucho menor que los de 1995.

Para enfrentar este problema y llegar a conclusiones válidas, los estadísticos, economistas y con alguna frecuencia los políticos en funciones de gobierno prefieren analizar el monto "real" del gasto, o sea, el expresado en colones "constantes", es decir, en colones

33. Esta limitación elimina la existencia de una relación positiva entre la evolución del "costo de la vida" y la evolución del IPC.

34. Por deflactar se entiende convertir una cantidad o serie, expresada en términos monetarios nominales, en otra expresada en términos reales, es decir, en valores expresados en poder adquisitivo constante; habitualmente, se utiliza el IPC para llevar a cabo dicha operación. Es común, también, el anglicismo "deflatar".

de un "cierto año" (año base). Para esto, deflactan las cifras dividiéndolas por el índice de precios, a saber:

$$\text{Valor “real” año Z} = \frac{\text{Valor nominal, año Z}}{\text{Índice precios, año Z}} \cdot 100 .$$

Deflactar consiste en tomar las cifras de una serie monetaria (ingresos, salarios, impuestos recaudados, gastos del gobierno, ventas, etc.), indicadas en colones de los años en consideración, es decir, en valores nominales, y dividirlas entre los índices de precios de esos años, de manera que se tenga una nueva serie expresada en colones con el poder adquisitivo del año base del índice. Deflactar una serie, entonces, es remover el efecto de los cambios en los precios y expresarla en los denominados "colones constantes" o "valores reales". Una vez realizado este procedimiento, se pueden calcular y analizar las variaciones reales ocurridas en el período. En el caso que mencionamos, la politóloga ya está en capacidad de determinar si los gastos del gobierno realmente han aumentado y a qué ritmo, si han permanecido estables o disminuido.

La deflactación se utiliza en múltiples situaciones en las que están involucradas series económicas, monetarias o financieras. Así, es muy común cuando se manejan cifras de Producto Interno Bruto (PIB), las cuales se dan en colones corrientes y colones constantes, y cuando se analiza la evolución del salario promedio arrojado por las cifras de la CCSS o del ingreso promedio dadas por la Encuesta de Hogares de Propósitos Múltiples. También, se utilizan mucho en el sector privado para ajustar a valores reales las ventas en valores corrientes, de manera que, se, determine, en términos reales, la tendencia de las ventas. Seguidamente, se presentan dos ejemplos del uso de esta técnica:

Ejemplo 8

Retome el problema de la politóloga y suponga que ella ha escogido para su análisis el período 1994-2009, el cual abarca dos administraciones del Partido Unidad Social Cristiana (Miguel Ángel Rodríguez y Abel Pacheco) y dos de Liberación Nacional (José María Figueres y Óscar Arias). Suponga, también, que ha obtenido de los Anuarios Estadísticos del INEC información sobre los Egresos Efectivos Totales del Gobierno y los valores del IPC. Esta aparece en la segunda y tercera columnas del cuadro 4.7. En la última columna se incluyen los egresos expresados en colones de 2006, los cuales se obtuvieron, para cada año, dividiendo los egresos nominales entre el IPC.

Se aprecia que, entre 1994 y el 2009, los egresos corrientes del gobierno subieron en un 925%, es decir, prácticamente se multiplicaron por 10; por otra parte, los ingresos reales, en colones constantes del 2006, solo aumentaron en 92%, en colones corrientes, es decir, apenas se duplicaron. Esto ocurrió porque los precios se quintuplicaron en ese período. En coincidencia con lo anterior, la tasa anual de crecimiento geométrico es de 18,1% para los egresos en colones corrientes y de 4,8% para los egresos en colones constantes.

No cabe duda que el panorama cambia, fuertemente, al deflactarse la serie, y se vuelve mucho más representativo del comportamiento de los egresos en el período considerado.

Cuadro 4.15

EGRESOS EFECTIVOS DEL GOBIERNO EN COLONES CORRIENTES Y COLONES CONSTANTES, 1994-2009 (AÑO BASE, JULIO 2006)

AÑO	EGRESOS Millones colones	IPC Julio 2006 = 100	EGRESOS Colones 2006
1994	319 073,4	23,32	1,368,239,3
1995	386 427,2	28,74	1 344 562,3
1996	458 669,7	34,11	1 344 678,1
1997	575 943,2	38,64	1 490 536,2
1998	689 123,3	43,16	1 596 671,2
1999	925 678,3	47,08	1 966 181,6
2000	1 479 864,6	52,57	2 815 036,3
2001	1 206 452,3	58,50	2 062 311,6
2002	1 325 551,6	63,75	2 079 296,6
2003	1 758 456,6	69,80	2 519 278,8
2004	2 009 194,0	78,48	2 560 135,1
2005	2 229 161,7	89,27	2 497 100,6
2006	2 668 557,2	100,00	2 668 557,2
2007	2 785 088,0	108,75	2 561 000,5
2008	3 269 629,0	124,16	2 633 399,6
% AUMENTO			
1994-2008	924,70%		92,50%
Tasa anual			
Crecimiento geométrico	18,10%		4,80%

Si la información se analiza según administración, se llega a ciertos resultados interesantes, como puede apreciarse en el cuadro 4.16.

Cuadro 4.16

EGRESOS EFECTIVOS DEL GOBIERNO EN COLONES CORRIENTES Y COLONES CONSTANTES, 1994-2009 (AÑO BASE, JULIO 2006), SEGÚN ADMINISTRACIÓN

ADMINISTRACIÓN AÑOS		Tasa anual crecimiento geométrico	
		Colones corrientes	Colones constantes
José Ma. Figueres	1994-1998	21,2%	10,0%
M. Á. Rodríguez	1998-2002	17,8	6,4
Abel Pacheco	2002-2006	19,1	4,1
Óscar Arias S	2006- 2010	13,3	2,9

Las tasas anuales de crecimiento de los egresos efectivos del gobierno central, expresados en colones corrientes, tienden a disminuir conforme se consideran las administraciones más recientes, y la tendencia es muy marcada si se toman los egresos reales (colones constante). Todo parece indicar que el gasto del gobierno central y, por ende, el gasto público disminuyen sostenidamente en el período analizado.

◇◇

Ejemplo 9

Una variable macroeconómica que usualmente se deflacta cuando se analiza su tendencia o se hacen comparaciones entre años o países, en un mismo momento, es el Producto Interno Bruto. Por ello es una práctica muy común que, cuando se manejan cifras de esta variable, se advierta de forma explícita al usuario o lector que las cifras son "a precios corrientes" o "a precios constantes". En el cuadro 4.17, se muestra información pertinente sobre este punto para Costa Rica en el período 2000-2008, Además, se incluyen cifras anuales de población para calcular el PIB real per cápita.

Cuadro 4.17

COSTA RICA: EVOLUCIÓN DEL PIB A PRECIOS CORRIENTES Y CONSTANTES Y PIB PER CÁPITA PERIODO 1999 - 2009

AÑO	PIB en millones de colones corrientes	ÍNDICE julio 2006=100	PIB en millones de colones 2006	Población	PIB per cápita colones 2006
1999	4 512 763,3	47,08	9 585 308,6	3 837 674	2 497 687
2000	4 914 534,3	52,57	9 348 553,0	3 925 331	2 381 596
2001	5 394 652,9	58,50	9 221 628,9	4 008 265	2 300 654
2002	6 060 944,4	63,75	9 507 363,7	4 089 609	2 324 761
2003	6 983 599,3	69,80	10 005 156,5	4 169 730	2 399 473
2004	8 143 550,1	78,48	10 376 592,9	4 248 481	2 442 424
2005	9 538 976,7	89,27	10 685 534,5	4 325 808	2 470 182
2006	11 517 821,8	100,00	11 517 821,8	4 401 849	2 616 587
2007	13 598 604,5	108,75	12 504 463,9	4 476 614	2 793 286
2008	15 706 900,8	124,16	12 650 532,2	4 549 903	2 780 396
2009	16 799 083,7	132,73	12 656 583,8	4 621 582	2 738 583
Tasa anual de crec. geométrico	14,00%		2,80%	1,90%	0,90%

Fuente: Banco Central de Costa Rica para las cifras del PIB y el INEC para el IPC. Las cifras de población se tomaron de "Estimaciones y Proyecciones de población 1970-2050", publicada por el INEC, agosto del 2002.

Puede notar que la magnitud del PIB varía, sensiblemente, según se consideren cifras en colones corrientes o en colones constantes, y solo coinciden en el 2006 (año base del índice). Por otra parte, si se consideran las cifras corrientes, el ritmo de crecimiento del PIB es de 14% anual, pero si elimina el efecto de la inflación y se usan las cifras en colones constantes, el crecimiento es de un modesto 2,8%; si se toma en cuenta el crecimiento de la población, calculando el PIB real per cápita, este se reduce a un poco menos del 1%.

Adicionalmente, conviene señalar que, a una tasa del 0,9%, el PIB per cápita se duplicaría en alrededor de 77 años.

◇◇

4.9.3. Ajustes salariales y de contratos

Existen disposiciones legales en muchos países, que obligan al Estado a fijar salarios mínimos y ajustarlos periódicamente.

En Costa Rica, existen disposiciones al respecto y el Poder Ejecutivo debe hacer fijaciones semestrales de salarios mínimos. En estas participan tanto representantes de los trabajadores como de los patronos, al igual que del gobierno. Uno de los insumos básicos que determinan el nivel del ajuste son los datos de inflación del semestre previo y la inflación proyectada para el semestre siguiente. Por ello, todos los grupos interesados: sindicalistas, cámaras patronales, funcionarios gubernamentales del área económica y hacendarias se mantienen al tanto de lo que sucede con el IPC. Obviamente, el comportamiento del índice –indicador del nivel de inflación– no es el único factor que influye en el monto del ajuste salarial, pero es sin duda el más importante, porque un objetivo central de la política de fijación de salarios mínimos mantener la capacidad adquisitiva del salario que recibe el trabajador.

Igualmente, en ciertos contratos pueden establecerse cláusulas de ajuste de los montos a ser pagados cuando la inflación alcanza un cierto nivel considerado elevado; estos ajustes podrían basarse en el IPC o en un índice especial construido para seguir la evolución de los precios de la actividad a la que se refiere el contrato.

4.9.4. Ajustes de series de ventas y de valores de inventarios

Los incrementos en los precios llevan como resultado aumentos en el nivel de ventas o en el de los valores de los inventarios, aunque se mantenga constante el volumen físico involucrado en las transacciones. Es decir, se vende o se tiene la misma cantidad de artículos y, sin embargo, aumentan los valores de las ventas y de los inventarios, así como los impuestos que se pagan. Los ajustes orientados a deflactar esas cifras se realizan, entonces, para determinar las tendencias y los beneficios reales obtenidos en el negocio, y evaluar y comparar las ventas y las ganancias relativas entre un año y otro.

4.10. EL ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR (IPC) DE COSTA RICA

Costa Rica calcula un Índice de Precios al Consumidor (IPC) desde 1936. Como los hábitos de consumo de los hogares cambian, se le han hecho actualizaciones en varias oportunidades: 1952, 1964, 1975 y en el 2006. Lo que se comenta seguidamente corresponde al IPC con base julio del 2006, preparado por el Instituto Nacional de Estadística y Censos.[35]

35. Para esta sección sobre el IPC, se tomó como base la publicación "Principales Características del Índice de Precios al Consumidor, Base Julio del 2006, INEC, agosto del 2006".

Área geográfica de cobertura. El índice se basa en los resultados de la Encuesta de Ingresos y Gastos (ENIG-2004) realizada entre abril del 2004 y abril del 2005 por el INEC. Aunque la encuesta fue de alcance nacional, por razones metodológicas y prácticas, en el diseño del índice se utilizó únicamente la información de 114 distritos urbanos del Gran Área Metropolitana de San José (GAM). De estos, 57 se ubican en el Área Metropolitana, 11 en la provincia de Alajuela, 19 en Cartago y 27 en Heredia. Dentro de esta área de cobertura se encuentra el 46% de la población total y el 72% de la población urbana del país.

Canasta de consumo. Como fue indicado oportunamente, para calcular el IPC se requiere definir una canasta de bienes y servicios que sea representativa de los hábitos de consumo de los hogares ubicados dentro del área geográfica de cobertura. La información para esta Canasta de Consumo se tomó de la ENIG-2004, y permitió detectar el consumo de 2278 bienes y servicios. De ese gran total, se seleccionó una muestra representativa para conformar la canasta; los principales criterios empleados para la selección fueron:

a) Que el porcentaje de gasto en el bien o servicio sea igual o mayor que el 0,05% del gasto total realizado por el hogar de referencia.

b) Que el artículo sea consumido por el 5% o más de los hogares del área de cobertura.

La canasta utilizada la conformaron 292 bienes y servicios que representaron el 89% del gasto de los hogares ubicados dentro del área de cobertura.

Las ponderaciones. Los artículos incluidos en la canasta se reunieron en 12 grupos y luego, para cada uno, se determinó su importancia relativa (ponderación) usando la información sobre la estructura del gasto de los hogares (ver cuadro 4.18).

Recolección mensual de la información. Los precios de los bienes y servicios incluidos en la canasta se recogen mensualmente mediante visitas a los puntos de venta seleccionados. La muestra de establecimientos para esa recolección se obtuvo del Directorio de Establecimientos 2004, elaborado por el INEC. Algunos precios de servicios se consiguen directamente de las empresas e instituciones que los prestan: electricidad, agua, teléfonos. Otro que se obtiene con un procedimiento especial es el de alquiler de viviendas.

Cuadro 4.18

PONDERACIÓN DE LOS GRUPOS QUE COMPONEN LA CANASTA DE CONSUMO DEL IPC, BASE JULIO DEL 2006 GRUPO PONDERACIÓN

Grupo	Ponderación %
Alimentos y bebidas no alcohólicas	18,61
Transporte	18,19
Alquiler y servicios de la vivienda	10,64
Artículos para la vivienda y servicio doméstico	8,65
Comidas y bebidas fuera del hogar	8,61
Entretenimiento y cultura	7,25
Bienes y servicios diversos	6,35
Educación	5,89
Prendas de vestir y calzado	5,86
Salud	4,81
Comunicaciones	4,45
Bebidas alcohólicas y cigarrillos	0,69
TOTAL	100,00

Fuente: INEC, "Principales Características del Índice de Precios al Consumidor, Base Julio del 2006", agosto del 2006.

Fórmula de cálculo. Para calcular el índice de precios mensual (IPC), el INEC utiliza la fórmula de Laspeyres pues, como se ha visto, la canasta de bienes y servicios del mes base (julio 2006=100, en este caso) se mantiene fija. La fórmula es la siguiente:

$$I_G^t = \frac{\sum_{g=1}^{n} I_g^t \cdot W_g}{W_G}.$$

Donde:

I_G^t = Índice general del mes en estudio.

I_g^t = Índice del grupo en el mes en estudio con respecto al período base.

W_g = Ponderación del grupo.

W_G = 100.

Para aplicar la fórmula anterior, primero se obtienen los relativos de precios de los artículos para estos en cada uno de los establecimientos. Luego, se calcula una media geométrica de esos relativos para cada artículo.[36] Con esa información, se obtiene un índice (I_g^t) para cada uno de los 12 grupos de artículos presentados en el cuadro 4.9; con estos y con ponderaciones de los 12 grupos, se aplica la fórmula para obtener el Índice General.

36. El empleo de la media geométrica para promediar los relativos procura reducir el efecto de los relativos con valores extremos.

Divulgación del IPC. Por la importancia que reviste para muchos sectores del país, la publicación y divulgación mensual del IPC es un evento de mucha importancia. La práctica establecida es dar a conocer el segundo día hábil del mes posterior al mes del estudio.

La divulgación incluye varios medios: un comunicado de prensa, un boletín informativo que se difunde por internet entre un número grande de personas, instituciones y empresas interesadas (también se imprime) e informes especiales. El boletín informativo también se coloca en el sitio web del INEC.

La información suministrada incluye el valor del índice de precios para el mes en curso y el mes anterior; la variación porcentual, o sea, el cambio en la inflación de un mes al otro; la variación porcentual para los 12 grupos de bienes y servicios que incluye el índice, así como la evolución de la variación porcentual en lo que va del año y la variación porcentual interanual, para esos 12 grupos.[37]

Otro dato que incorpora el boletín corresponde a la variación porcentual acumulada por mes, en el año en consideración y el año previo período. Esta se ilustra seguidamente con el boletín para abril del 2010:

Cuadro 4.19

VARIACIÓN PORCENTUAL MENSUAL Y ACUMULADA POR MES 2009-2010

Mes	2009		2010	
	Mensual	Acumulada	Mensual	Acumulada
Enero	0,38	0,38	1,63	1,63
Febrero	0,44	0,82	0,69	2,32
Marzo	0,01	0,83	0,24	2,57
Abril	0,33	1,17	0,06	2,63
Mayo	-0,12	1,04		
Junio	0,17	1,21		
Julio	0,92	2,14		
Agosto	0,65	2,81		
Setiembre	0,11	2,92		
Octubre	0,23	3,16		
Noviembre	-0,16	3,00		
Diciembre	1,02	4,05		

Fuente: INEC. "Índice de Precios al Consumidor", Boletín Informativo, Vol. 4, AÑO 21, ABRIL 2010.

37. La variación porcentual interanual mide la inflación ocurrida en los doce meses previos. Así, la interanual mayo 2009-abril del 2010, mide la inflación o cambio porcentual ocurrido en el año que va de mayo del 2009 a abril del 2010 y se calcula dividiendo el [IPC-abril del 2010- IPC-abril 2009] entre IPC-abril 2009 y multiplicando el valor resultante por 100.

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

I. SELECCIÓN ÚNICA. A continuación se le dan 7 preguntas de selección única, marque con una equis la opción que conteste en forma correcta y verdadera la proposición dada.

1. Los números relativos contribuyen al análisis de los datos estadísticos
   a) Facilitándolo al eliminar los decimales
   b) Haciendo que los datos sean más confiables
   c) Facilitando la comparación con otros grupos de datos
   d) Aumentando la validez de los datos

2. En una prueba de bachillerato participaron 40 alumnos de un colegio y 16 de ellos reprobaron; 12 hombres y 4 mujeres. De las afirmaciones siguientes ¿cuál o cuáles son correctas?
   a) Reprobaron 2 de cada 5 estudiantes.
   b) Reprobaron 4 de cada 10 estudiantes.
   c) Reprobó 1 de cada 10 mujeres.
   d) Por cada mujer reprobada, hubo 3 hombre reprobados.

3. En el año 2009 un nuevo tipo de avión realizó 2760 vuelos y tuvo 3 accidentes fatales. La razón entre accidentes y vuelos es de 0,001087. ¿Cuál de los siguientes factores utilizaría usted para amplificarla?
   a) 100
   b) 1000
   c) 100 000
   d) 1 000 000

4. La característica fundamental que distingue a las tasas de otros números relativos es la siguiente:
   a) En las tasas se relaciona la parte con el todo.
   b) Las tasas son concretas y específicas.
   c) En las tasas se toma en cuenta un período de referencia.
   d) Las tasas se pueden expresar en tanto por mil.

5. Al calcular un porcentaje para expresar el cambio ocurrido entre dos años, se debe tomar como base:
   a) El año con la cifra más pequeña.
   b) Cualquiera de los dos años indistintamente.
   c) Siempre el año más reciente.
   d) Siempre el año más antiguo.

6. Los porcentajes basados en un número pequeño de casos son:
   a) Más confiables porque se comprenden mejor.
   b) Más concretos y representativos.
   c) Poco confiables debido a su pequeña base.
   d) Muy apropiados para estudios exploratorios o preliminares.

7. De acuerdo con los datos presentados en los Anuarios Estadísticos del INEC, la matrícula al inicio del curso lectivo en las universidades estatales fue de 61 654 alumnos en el año 2000 y de 75 288 en el 2008. ¿Cuál de los valores que se presentan seguidamente corresponde a la tasa de crecimiento geométrico anual del período 2000-2008?
   a) 2,76%
   b) 2,53%
   c) 2,50%
   d) 2,46%

II. Desarrollo. A continuación, se le dan 19 preguntas que usted debe desarrollar según lo estudiado en el capítulo.

1. Debido a una serie de problemas de diversa índole, una empresa redujo los sueldos de sus vendedores en un 30%. Una vez superada la crisis, realizó tres aumentos semestrales, cada uno del 10%. Al hacer el último, el gerente afirmó:

   "Con este aumento hemos logrado que nuestros vendedores estén en la misma situación en la que se encontraban antes de la crisis". ¿Tiene razón el gerente o no la tiene? ¿Por qué?

2. Al comentar los resultados de una negociación salarial que afectó a 24 000 profesores, 10 000 funcionarios administrativos y 4000 conserjes, el Ministro de Educación señaló que los aumentos acordados habían sido de 8% para los profesores, 10% para los administrativos y 15% para los conserjes. Luego afirmó: "esto quiere decir que las personas que laboran en la educación secundaria recibieron un aumento

promedio del 11%". ¿Es correcta o incorrecta la afirmación del Ministro? Justifique brevemente su respuesta.

3. Según el INEC, la tasa bruta de natalidad de la provincia de Limón fue, en el 2008, de 18,2 por mil. Por otra parte, la población total de la provincia, al 1° de julio de ese año, se estimaba en 439 928 habitantes. Con base en la información anterior, ¿cuántos nacimientos calcula usted que ocurrieron en el 2008 en la provincia de Limón?

4. El director de un colegio privado desea estimar, para ciertos propósitos, los probables ingresos anuales por matrícula, mensualidad y otras actividades en los próximos cinco años. Él sabe que el ingreso por esos conceptos se calcula –para el presente año– en 610 millones de colones y, de acuerdo con los datos históricos y otra información disponible, la tasa de crecimiento anual de los ingresos puede estar, en promedio, en alrededor de 15%. ¿En cuánto estimaría usted los ingresos esperados para cada uno de los próximos cinco años?

5. El presidente de un país centroamericano afirmó en un discurso: "entre el año 2000 y el 2010, el país aumentó el número de escuelas en un 33%; esto significa, en términos simples, que a cada dos escuelas que existían en el año 2000 hemos agregado otra durante el período". Explique por qué es incorrecta la última parte de la afirmación del presidente.

6. En el año 2008 en Costa Rica se efectuaron 25 034 matrimonios, los cuales presentaron la siguiente distribución por regiones y tipo de matrimonio:

Tipo Matrimonio Provincias [38] Provincias

	Centrales	**Costeras**
Católicos	12 520	5130
Civiles	6 276	1108
	18 796	6230

a) ¿En cuál región fue más frecuente el matrimonio católico en el 2008?

b) ¿Cuál fue el porcentaje de matrimonios civiles en todo el país?

38. Las provincias centrales son San José, Alajuela, Cartago y Heredia, y las costeras, Guanacaste, Puntarenas y Limón.

7. A continuación se presenta alguna información correspondiente al cantón de Grecia:

   Extensión: 395,72 km^2

   Censo de 1984: población total 38 361

   Censo del 2000: población total 65 119

   Población urbana: 14 963

   Nacimientos ocurridos durante el 2003: 1245

   Defunciones ocurridas durante el 2003: 284

   Utilizando esa información:

   a) Obtenga la proporción de población urbana en el año 2000

   b) Calcule la densidad en el 2000. ¿Usted diría que es alta o es baja?

   c) Calcule la tasa anual de crecimiento geométrico correspondiente al período intercensal.

   d) Obtenga la tasa bruta de mortalidad para el año 2003.

8. Seguidamente, se incluyen cifras para Costa Rica en los años 2005 y 2009, correspondientes al Ingreso Nacional Disponible, Población e Índices de Precios. [39]

Año	Ingreso nacional (millones colones)	Población miles habitantes	Índice de precios (2006 = 100)
2005	9 295 162	4 263 479	89,27
2009	16 429 658	4 509 290	132,73

Fuente: Banco Central de Costa Rica (Ingreso Nacional Disponible) e INEC: "Estimaciones Proyecciones de población por sexo y edad (cifras actualizadas) 1950-2050.

   a) Calcule el aumento porcentual experimentado por el ingreso nacional entre el 2005 y el 2009.

   b) Ajuste los valores del Ingreso Nacional para eliminar el efecto del cambio en los precios y calcule, para los nuevos valores, el porcentaje de cambio entre 2005 y el 2009.

39. El Ingreso Nacional Disponible son los recursos a disposición de los residentes de un país como resultado de su esfuerzo productivo, se pueden destinar a la adquisición de bienes y servicios de consumo final o al ahorro. Se obtiene a partir del producto interno bruto a precios de mercado, del cual se deduce el monto de consumo de capital fijo (que es un costo de producción), y se le agregan los ingresos factoriales netos, procedentes del resto del mundo.

c) Para eliminar el efecto del crecimiento de la población, obtenga para cada año el ingreso nacional "real" por habitante y luego calcule el porcentaje de aumento que experimentó ese ingreso por habitante.

d) Interprete los porcentajes obtenidos en a), b) y c), indicando claramente qué significan.

e) Calcule la tasa de crecimiento geométrico anual para el Ingreso Nacional Disponible Real, para la población y para el IND real per cápita e interprete los resultados. Recuerde que el modelo geométrico es

$$Pt = P_0(1 + r)t.$$

9. La Cooperativa Nacional de la Vivienda (CNV) de un país se dedica a dotar de vivienda a la clase media. En la Asamblea Anual, uno de los asociados criticó su labor afirmando que "la CNV no está cumpliendo cabalmente los objetivos para los cuales fue creada, ya que en la última década, 1998-2008, el costo de la vivienda que construye para las familias de clase media, prácticamente se duplicó".

El gerente de la cooperativa contestó que la crítica estaba mal fundada, "ya que más bien el costo real de las viviendas que construimos, disminuyó en el período, además las casas son más grandes". En apoyo de su respuesta incluyó la siguiente información:

Año	Precio de vivienda (miles de dólares)	Área de construcción En m^2	IPC (1995=100)	Salario promedio mensual de empleados Nivel medio
1998	200 000	80	117	1500
2008	390 000	100	200	3000

a) ¿Cómo razonó el diputado? Explique.

b) ¿Qué razonó el gerente? Explique.

c) ¿Cuál de ellos realizó el razonamiento apropiado y por qué piensa usted así?

d) Si un empleado de nivel medio recibió en 1998 y en el 2008 los salarios mensuales indicados arriba, ¿diría usted que su capacidad para comprar casa ha aumentado? Explique por qué.

10. Utilizando la fórmula de Laspeyres se calcularon los índices de precios para el período 2004-2007, con base en el 2006, que se incluyen seguidamente:

AÑO	2004	2005	2006	2007
ÍNDICE	91	95	100	108

a) ¿Qué sistema de ponderación fue empleado en el cálculo?

b) Explique a qué pregunta responde y cómo se puede interpretar el valor obtenido para 2007.

c) ¿Por qué se prefiere, desde el punto de vista práctico, calcular los índices de precios utilizando la fórmula Laspeyres?

11. En una charla, un importante dirigente de un gobierno, presentó los siguientes datos sobre salario mensual promedio de un obrero en diferentes años:

	Salario semanal (pesos)	Jornada trabajo	Índice de precios
Año			
Enero 2005	66	44	100
Enero 2010	84	42	140

Luego agregó: "Como puede notarse, el salario del obrero ha aumentado en 18 pesos con respecto a 2005, además, el número de horas por semana que trabaja el obrero es menor actualmente. Solo un mal intencionado podría negar que el obrero está actualmente (2010) mucho mejor que antes. ¡El socialismo cumple!" ¿Le parece a usted correcta la afirmación del dirigente? Justifique su respuesta.

12. El valor de las exportaciones de Costa Rica, en millones de dólares, en el período 1999-2009 fue el siguiente:

EXPORTACIONES

Año	Millones de dólares	Año	Millones de dólares
1999	6662,4	2005	7026,4
2000	5848,7	2006	8198,8
2001	5021,3	2007	9337,0
2002	5263,5	2008	9503,7
2003	6101,9	2009	8777,2
2004	6301,5		

Fuente: Banco Central de Costa Rica

a) Construya una índice para la serie usando como año base 1999.

b) Comente la evolución que han seguido las exportaciones en el período.

c) Interprete el valor del índice para el año 2007.

13. Una ONG de bien social presta atención y apoyo a pacientes diabéticos. Los datos que se incluyen abajo corresponden al consumo promedio mensual de medicinas y servicios, y sus precios para los años 2000, 2005 y 2010 (datos hipotéticos en colones).

Artículo o servicio	Año 2000		Año 2005		Año 2010	
	Precio	Consumo	Precio	Consumo	Precio	Consumo
Insulina (frasco)	1200	1,5	18 000	1,3	21 000	1,2
Tiritas pruebas (tiritas p/mes)	200	14	350	12	400	10
Pastillas control Presión (caja)	9000	2,5	11 000	2,5	13 000	2,5
Tabletas control Colesterol	6000	12	9000	9	10 000	12
Cápsulas protección riñones (unidades)	10 000	15	12 000	18	15 000	20
Atención médica (consultas p/año)	10 000	2	20 000	2,5	30 000	3

Considerando el año 2000 como base:

a) Obtenga el índice de precios de agregado simple.

b) Calcule el índice de precios de Paasche para cada uno de los tres años e interprete el resultado obtenido para el 2005.

c) Calcule el índice de precios de Laspeyres para el 2005, interprete el resultado obtenido

14. Por disposición constitucional, el Estado costarricense debe mantener un fondo especial para el financiamiento de la educación superior pública. Este fondo se denomina FEES (Fondo Especial para la Educación Superior). Seguidamente, se presentan las sumas asignadas al FEES en cada uno de los años, en el periodo del 2001 al 2009, así como información suplementaria del IPOC y de la matrícula inicial de las cuatro universidades públicas:

AÑO	Monto en millones colones	IPC	Matrícula Inicial total
2001	49 177,6	52,57	61 594
2002	56 643,2	63,75	66 355
2003	61 297,5	69,8	68 861
2004	69 381,4	78,48	69 729
2005	86 577,6	89,27	71 344
2006	109 867,5	100	74 387
2007	129463,0	108,75	74321
2008	155 643,1	124,16	75 288
2009	199 909,1	132,73	pend

a) En términos porcentuales, ¿cuánto han, crecido la matrícula y el monto del FEES entre el 2001 y el 2008?

b) Mida el ritmo de crecimiento del FEES y de la matrícula estudiantil entre el 2001 y el 2009, utilice la tasa anual de crecimiento geométrico. Comente los resultados.

c) Calcule el monto real del FEES para cada uno de los años del período y su tasa de crecimiento en el lapso considerado.

d) Calcule el monto real del FEES por estudiante para cada uno de los años, y su tasa de crecimiento.

e) Compare y comente el crecimiento del monto real del FEES, de la matrícula y del monto real per cápita.

15. Discuta las ventajas y desventajas del índice de Laspeyres sobre el índice de Paasche.

16. Compruebe, usando el modelo exponencial como base, el tiempo que le toma a una población, o una suma, duplicarse, a una tasa de crecimiento r, dado por la expresión:[40]

Tiempo "t" para que se duplique una población $= \dfrac{69}{r(\%)}$.

40. El tiempo puede estar dado en años, mese, días, etc., y la tasa también debe ser para este tipo de periodo.

17. Usando la regla anterior, calcule el tiempo en años que tomaría la duplicación de la magnitud indicada:

    a) Un capital invertido al 2% de interés.

    b) El padrón electoral, suponiendo que se mantiene la tasa anual de crecimiento reciente de alrededor de 2,7%.

    c) La población total de Costa Rica, a la tasa de 1,5%.

    d) El monto del FEES a una tasa anual del 4,3%.

    e) El PIB per cápita en colones constantes a una tasa del 1%.

18. Si Costa Rica decidiera duplicar su nivel de vida en una generación, o sea, en unos 25 años, ¿a qué tasa promedio debería crecer el PIB per cápita real?

19. Si el crecimiento de la población se estima que será en un futuro próximo de alrededor del 1%, a qué tasa debe crecer el Producto Interno Bruto real para que el nivel de vida se duplique en 25 años.

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

I. SELECCIÓN ÚNICA

1. c)
2. a) y b)
3. b)
4. c)
5. b)
6. c)
7. b)

$$M_t = M_0 (1 + r)^t$$

$$1 + r = \left[M_t / M_0\right]^{1/t}$$

$$1 + r = (75288 / 654)^{1/8} = (1,221137)^{1/8}$$

$$1 + r = 1,02529$$

$$r = 2,53\,\%$$

II. DESARROLLO

1. El gerente no tiene razón. Los tres aumentos fueron destinados a salarios que eran inferiores al cual se aplicó la reducción del 30%; por lo tanto, los tres aumentos semestrales de 10% no compensaron el efecto de la reducción del 30%. Esto se puede apreciar seguidamente:

   Salario reducido = Salario inicial = 0,70 (reducción del 30%)

   Salario alcanzado después de los tres aumentos de 10% = Salario reducido · (1,10) · (1,10) · (1,10)

   = [Salario inicial · 0,70] · $(1,10)^3$ = Salario inicial · 0,70 · (1,331) = Salario inicial · 0,9317

   El salario, después de los tres aumentos es solo el 93,17% del salario inicial, es decir, del que se percibía antes de la rebaja.

2. Es incorrecta la afirmación del Ministro de Educación, porque calcula un promedio simple de los aumentos acordados a los tres grupos, (8 + 10 + 15)/3=11; al hacerlo, no toma en cuenta el hecho de que el número de profesores, empleados administrativos y conserjes varía significativamente. El cálculo correcto del porcentaje promedio de aumento se obtiene al ponderar cada porcentaje de aumento por el número de personas a las cuales beneficia, y divide luego, por el total de funcionarios, 38 000 en este caso:

$$\%\text{ promedio de aumento} = \frac{24\,000 \cdot 8\,\% + 10\,000 \cdot 10\,\% + 4000 \cdot 15\,\%}{24\,000 + 10\,000 + 4000} \cdot 100 = 9,3\,\%.$$

El aumento promedio no es del 11%, sino del 9,3%.

3. La definición de la tasa bruta de natalidad es la siguiente:

$$\text{Tasa bruta de natalidad} = \frac{\begin{array}{c}\text{Nacimientos vivos ocurridos}\\ \text{durante el año natural Z}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Población total a mitad}\\ \text{del año natural Z}\end{array}} \cdot 1000$$

De esta, se puede derivar una fórmula para calcular el número de nacimientos vivos ocurridos, conociendo la tasa y la población

$$\begin{aligned}\text{Nacimientos ocurridos} &= (\text{tasa bruta de natalidad}) \cdot (\text{población a mitad del año}) / 1000\\ &= \frac{18,2 \cdot 439928}{1000} = 8007.\end{aligned}$$

Se estima que en el año 2008 ocurrieron, en Limón, 8007 nacimientos.

4. La proyección se inicia aplicando el factor $1 + r = 1,15$ al valor inicial (año 0), 610 millones para obtener la cifra estimada para el año 1.

Procediendo en igual forma, se obtienen las estimaciones para los siguientes años:

Año 1: $610 \cdot 1,15 = 701,5$ millones

Año 2: $701,5 \cdot 1,15 = 806,72$

Año 3: $806,72 \cdot 1,15 = 927,73$

Año 4: $927,73 \cdot 1,15 = 1066,89$

Año 5: $1066,89 \cdot 1,15 = 1226,92$

5. La última parte de la afirmación del presidente es incorrecta, porque si el aumento fue de un 33%, quiere decir que, a cada tres escuelas existentes en el 2000, se agregó una durante el período. Si a cada dos se agrega una, el aumento es de 50%.

6. a) % de matrimonios católicos, provincias centrales $= \frac{6276}{18\,796} \cdot 100 = 33{,}4\,\%$

% de matrimonios católicos, provincias costeras $= \frac{1108}{6238} \cdot 100 = 17{,}8\,\%$

El matrimonio católico es más frecuente en las provincias centrales, aunque no es mayoritario.

b) El porcentaje de matrimonios civiles en todo el país fue, en el 2008, de 70,5%.

$$\text{\% de matrimonios civiles, en todo el país} = \frac{12\,520 + 5130}{25\,034} = \frac{17\,650}{25\,034} \cdot 100 = 70{,}5\,\%.$$

7. a) Proporción de población urbana, según censo del 2000 $= \frac{\text{población urbana}}{\text{población total}}$

$$= \frac{14\,963}{65\,119} = 0{,}23 = 23\,\%.$$

b) Densidad de población en el año 2000 $= \frac{\text{población total}}{\text{superficie en km}^2}$

$$= \frac{65\,119}{395{,}72} = 164{,}6 \text{ hab/km}^2.$$

Si se compara esta densidad con la de todo el país, que es de 74,6 hab/km^2, se puede decir que la de Grecia es mucho más alta que la del resto; sin embargo, todavía está muy alejada de ciertos cantones urbanos como Tibás (densidad de 8843 habitantes en el año 2000), San José (6940), Goicoechea (3731), Alajuelita (3321) y Curridabat (3818).

c) $1 + r = [M_t/M_0]^{1/t} = [65\,119/38\,361]^{1/16} = [1{,}69753]^{0{,}0625} = 1{,}033626.$

La tasa anual de crecimiento geométrico del período es: $r = 3{,}36\,\%$.

d) Para calcular la tasa bruta de mortalidad del 2003, se necesita estimar primero la población a mediados de ese año; esto se hace proyectando la población censada al 2003, utilizando la tasa de crecimiento geométrico:

Población total a mediados del 2003 $= 65\,119 \cdot (1{,}0336)^3 = 71\,906$.

Tasa bruta de mortalidad año 2000 $= \frac{\text{número defunciones ocurridas}}{\text{población total a mitad de año}} \cdot 1000$

$$= \frac{284}{71\,906} \cdot 1000 = 3{,}9.$$

8. a) Aumento porcentual

Aumento porcentual del ingreso nacional disponible $= \frac{16\,429\,658 - 9\,295\,162}{9\,295\,162} \cdot 100$

$$= 76{,}75\,\%.$$

b) Para deflactar los valores del Ingreso Nacional, los dividimos por el IPC del año.

Año 2005: 9 295 162/89,27] · 100 = 10 412 414 millones de colones del 2006

Año 2009: 16 429 658/132,73] · 100 = 12 378 255 millones de colones del 2006

$$\text{Aumento porcentual del IDN real} = \frac{12\,378\,255 - 10\,412\,414}{10\,412\,414} \cdot 100 = 18{,}9\,\%.$$

c) Para obtener los valores per cápita del IND, se dividen los valores obtenidos en b) por el tamaño de la población:

Año 2005: 10 412 414 millones /4 263 479= 2 442 234

Año 2009 12 378 255 millones/4 509 290= 2 745 056

$$\text{Aumento porcentual del IDN per cápita real} = \frac{2\,745\,056 - 2\,442\,234}{2\,442\,234} \cdot 100 = 12{,}4\,\%.$$

d) Interpretación de a): el Ingreso Nacional Disponible en colones corrientes aumentó en un 76,8% entre el 2005 y el 2009.

Interpretación de b): el Ingreso Nacional Disponible "real", en colones del 2006, aumentó en un 18,9% entre el 2005 y el 2009.

Interpretación de c): el IND por habitante, en colones, del 2006, aumentó en un 12,4%.

e) Cálculo de las tasas de crecimiento geométrico anual del período para el IND real, la población y el IND per cápita real:

$1 + r = \left[IND_t / IND_0\right]^{1/t}$ (real, colones del 2006)

$= \left[12\,378\,255/10\,412\,414\right]^{1/4} = \left[1{,}1887978\right]^{0{,}25} = 1{,}044$

$r = 4{,}4\%$

$1 + r = \left[Pob_t / Pob_0\right]^{1/t}$

$= \left[4\,509\,290/4\,263\,479\right]^{1/4} = \left[1{,}057655\right]^{0{,}25} = 1{,}0141$

$r = 1{,}4\%$

$1 + r = \left[IND - per\ cápita_t / IND - per\ cápita_0\right]^{1/t}$ (real, colones del 2006)

$= \left[42\,745\,050/2\,442\,222\right]^{1/4} = \left[1{,}123997\right]^{0{,}25} = 1{,}0297$

$r - 3{,}0\%$

Interpretación de las tasas:

$r = 4{,}4\%$: el Ingreso Nacional Disponible real, en colones del 2006, creció a una tasa anual del 4,4% en el período 2005-2009.

$r = 1{,}4\%$: la población creció a una tasa de 1,4% en el período.

$r = 3{,}0\%$: el ingreso per cápita real creció a una tasa anual del 3%.

9. a) El asociado razonó así:

$$\text{Aumento porcentual} = \frac{390\,000 - 200\,000}{200\,000} \cdot 100 = 95\,\%.$$

El gerente razonó así:

$$\text{Precio real 1998} = \frac{200\,000}{80 \cdot 117} \cdot 100 = 2136{,}8 \text{ colones 1995 el m}^2.$$

$$\text{Precio real 2008} = \frac{390\,000}{100 \cdot 200} \cdot 100 = 1950 \text{ pesos del 2005}.$$

Disminución real del metro cuadrado: $2136{,}8 - 1950 = 186{,}8$.

c) El gerente realizó el razonamiento apropiado porque hizo la comparación tomando en cuenta el área de construcción, calculó los costos por metro cuadrado, además, deflactó esos costos usando el IPC.

d) Capacidad de compra de los salarios en 1998 y en el año 2008:

Año 1998: $(1500 / 1117) \cdot 100 = 1282$ colones de 1995.

Año 2008: $(3000 / 200) \cdot 100 = 1500$ colones de 1995.

Como puede apreciarse, el empleado aumentó su capacidad de compra entre 1998 y el 2008, ya que salario real, en colones de 1995, pasó de 1282 a 1500 colones; esto implica un aumento en su poder de compra de un 17% en los 10 años.

10. a) El sistema de ponderación empleado en el cálculo son los consumos observados en el año base 2006 para los bienes y servicios que constituyen la "canasta básica" del índice.

b) El índice de 2007 responde a la pregunta, ¿cuánto se tiene que pagar en el año 2007 para poder adquirir la misma cantidad de artículos adquiridos en 2006? Interpretación: en el 2007adquirir la misma canasta de bienes y servicios, que en el 2006, cuesta un 8% más, por cada 100 colones que se gastaban en el 2006, en el 2007 se deben gastar 108 colones.

c) Desde un punto de vista práctico, el índice de Laspeyres se prefiere por dos razones:

i. Para el cálculo del índice de Laspeyres, no es necesario mantener un registro continuo de las cantidades consumidas de cada artículo incluido en el índice, durante todo el período bajo estudio; basta disponer del consumo del año base y de los precios de los demás años, que son más fáciles de registrar. Es más simple.

ii. Debido a la fórmula de cálculo del índice de Laspeyres es posible establecer comparaciones entre cada año y el año base, como también entre años.

11. Para evaluar la afirmación es conveniente calcular los salarios deflactados por hora de los obreros, dividiendo los salarios semanales entre el número de horas trabajadas y el índice de precios:

Salario real 2005 = $\frac{66}{44 \cdot 100} \cdot 100 = 1,5$ pesos del 2005.

Salario real 2010 = $\frac{84}{42 \cdot 140} \cdot 100 = 1,43$ pesos del 2005.

Es cierto que el salario en pesos corrientes aumentó en 18 pesos entre el 2005 y el 2010. Sin embargo, como se aprecia los cálculos realizados, el salario real por hora del 2010 es menor que el del 2005, por lo cual la afirmación del ministro es incorrecta.

12. a) Para calcular la serie de relativos simples, se calculan estas dividiendo el monto de las exportaciones de cada año entre las exportaciones de 1999 y multiplicando por 100 el resultado. Los índices aparecen abajo.

AÑO	EXPORT $	ÍNDICE	AÑO	EXPORT $	ÍNDICE
1999	6662,4	100,0	2005	7150,69	105,5
2000	5848,7	87,8	2006	8453,22	123,1
2001	5021,3	75,4	2007	9569,22	140,1
2002	5263,5	79,0	2008	9606,01	142,6
2003	6101,9	91,6	2009		
2004	6301,5	94,6			

b) El examen de los índices revela: i) las exportaciones bajaron en los dos primeros años alcanzaron un mínimo en el 2001, cuando fueron un 25% menores que 1999; ii) luego empezaron a crecer y en el 2005 fueron un 5,5% mayores que el año base 1999; iii) continuaron subiendo en el 2006 y el 2007, pero en los últimos dos años (2007-2008) tendieron a estabilizarse en un nivel 40% superior al de 1999; iv) globalmente, en el periodo 2000-2004, las exportaciones fueron inferiores a las de 1999. Por último, siempre son superiores a las de ese año base.

c) El valor del índice para el año 2007 (140,1) indica que, en ese año, las exportaciones de Costa Rica fueron un 40% superiores a las observadas en 1999.

13. Seguidamente, se presenta una tabla con la información básica y con información calculada para realizar los cálculos.

a) Índice agregado simple

0-2000	1-2005	2-2010
47 200	70 350	89 400
100	149	189,4

Cálculo del Índice de Paasche para el 2005

$$2000: \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{285300}{285300} \cdot 100 = 100$$

$$2005: \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{387600}{289000} \cdot 100 = 134,1$$

$$2010: \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_2} = \frac{571700}{340900} \cdot 100 = 167,7$$

Interpretación: adquirir las cantidades compradas en el año 2005, a los precios del año 2005, es 34% más alto de lo que hubiera costado adquirirlas a los precios del año base 2000. En consecuencia, la atención de un diabético promedio, en el 2005, es un 34% más alto que en el año 2000.

c) Cálculo del índice de Laspeyres para el año 2005.

ÍNDICE LASPEYRES 2005: $\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{387\,400}{285\,300} \cdot 100 = 135,8.$

Interpretación: para adquirir la misma cantidad de bienes y servicios que en el 2000, es necesario pagar un 35,8% más en el 2005. La atención del diabético ha subido un 36% en ese período.

14. a) Aumento porcentual del monto del FEES 2001-09 $= \left(\left[\frac{M_t}{M_0}\right] - 1\right) \cdot 100$

$$= \left[\frac{155\,643,1}{49\,177,6} - 1\right] \cdot 100 = [3,16492 - 1] \cdot 100 = 216,5\%.$$

Aumento porcentual de la matrícula estudiantil 2001-09 $= \left(\left[\frac{M_t}{M_0}\right] - 1\right) \cdot 100$

$$= \left[\frac{75\,288}{61\,594} - 1\right] \cdot 100 = [1,22233 - 1] \cdot 100 = 22,2\%.$$

El monto del FEES ha crecido 216,5% entre 2001 y el 2008, es decir, se ha triplicado. Mientras tanto, la matrícula total de las universidades públicas aumentó en solo un 22%.

b) Cálculo de las tasas de crecimiento geométrico 2001 a 2008:

$1 + r = [M_t / M_0]^{1/t} = [155\,643,1/49\,177,6]^{1/7} = [3,16492]^{0,14286} = 1,17896.$

La tasa anual de crecimiento geométrico del monto del FEES es de $r = 17,9\%$.

$1 + r = [M_t / M_0]^{1/t} = [75\,288/61\,594]^{1/7} = [1,22233]^{0,14286} = 1,02910.$

La tasa anual de crecimiento geométrico de la matrícula es de $r = 2,9\%$.

c y d) En la tabla siguiente, se responde a estas dos preguntas:

AÑO	Monto FEES millones colones	IPC	Monto FEES colones 2006	Matrícula inicial total	Monto p/est colones 2006
2001	49 177,6	52,57	93 546,9	61 594	1 518 766
2002	56 643,2	63,75	88 852,1	66 355	1 339 041
2003	61 297,5	69,8	87 818,8	68 861	1 275 305
2004	69 381,4	78,48	88 406,5	69 729	1 267 858
2005	86 577,6	89,27	96 984,0	71 344	1 359 385
2006	109 867,5	100,00	109 867,5	74 387	1 476 972
2007	129 463,0	108,75	119 046,4	74 321	1 601 787
2008	155 643,1	124,16	125 356,9	75 288	1 665 031
2009	199 909,1	132,73	150 613,4		
r geométrica	17,9%		4,3%	2,9%	1,3%

e) El monto del FEES creció en promedio, en términos reales (colones del 2006), en la última década, a un ritmo de 4,3% mientras que la matrícula aumentó 2,9%, como consecuencia, el gasto por estudiante, creció al 1,3% en términos reales.

15. El índice de Laspeyres tiene la ventaja de que no requiere mantener el sistema de ponderaciones actualizado con los cambios producidos en el patrón de consumo. En consecuencia, su cálculo resulta más económico, puesto que solo se recopila información sobre los precios de los artículos en el año de interés. Por otra parte, el cálculo del índice de Paasche sí actualiza las ponderaciones para cada período; precisamente por eso, su cálculo se vuelve más costoso y complicado.

Otra ventaja del índice de Laspeyres es que, como mantiene constante la canasta de consumo, los cambios observados con respecto al año base y entre años pueden atribuirse solo a los cambios presentes en los precios. Esto no sucede con el índice de Paasche, en el cual, debido a su fórmula de cálculo, el índice de un período solo es comparable con el año base; las comparaciones entre años distintos no es posible, pues llevan ponderaciones diferentes. Esta limitación no la tiene el índice de Laspeyres.

16. Se sabe que en el modelo de crecimiento exponencial $M_t = M_0 e^{rt}$. Si se tiene $M_0 = 1$ y se quiere saber en cuánto tiempo ese valor se duplica, $M_t = 2$, a la tasa de crecimiento r, se sustituye en el modelo básico, se ordena y se obtiene:

    $1 + e^{rt} = 2$

    Si se toma logaritmo natural, se obtiene:

    $rt \cdot (\ln e) = \ln 2$

    $rt = 0,693$.

    Despejando t, se obtiene:

    $t = \frac{0,693}{r}$ o en una forma aproximada, $t = \frac{69}{r(\%)}$.

17. El tiempo requerido para duplicación de la magnitud indicada es de:

    c) 69/2 = entre 34 y 35 años

    b) 69/2,7 = 25,6 años, o sea, alrededor de 26 años

    c) 69/1,5 = 46 años

    d) 69/4,3 = 16 años

    e) 69/ 1 =69 años

18. Despejando t en la expresión básica, se obtiene $r(\%) = \frac{69}{t}$. Por lo tanto, si el tiempo fijado es 25 años, la tasa de crecimiento del PIB per cápita real debe ser de un 2,8%.

19. Si se espera que el crecimiento futuro de la población de Costa Rica sea alrededor de un 1%, el PIB real deberá crecer alrededor de un 3,8%, o sea, 2,8 + 1 = 3,8 para que Costa Rica duplique su nivel de vida en una generación.