MICROECONOMIA, I

GAETANO BLOISE

Esercitazione, 11 maggio 2009

Esercizio 1 (Convessità)**.** Data la funzione di produzione $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, il sottostante insieme di produzione è dato da

$$Y = \left\{(z, -x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_- : z \leq f(x)\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Si mostri che, se la funzione di produzione è concava, allora l'insieme di produzione è convesso. Si mostri anche che, se la funzione di produzione è concava, allora, per ogni z in $\mathbb{R}$, l'insieme di fabbisogno,

$$V(z) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : f(x) \geq z\right\} \subset \mathbb{R}^n_+,$$

è convesso.

Esercizio 2 (Rendimenti di scala)**.** Data la funzione di produzione $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, i rendimenti di scala sono crescenti se, per ogni vettore di impieghi x in $\mathbb{R}^n_+$, data un'espansione di scala $\lambda > 1$,

$$f(\lambda x) > \lambda f(x);$$

i rendimenti di scala sono decrescenti se, per ogni vettore di impieghi x in $\mathbb{R}^n_+$, data un'espansione di scala $\lambda > 1$,

$$f(\lambda x) < \lambda f(x);$$

i rendimenti di scala sono costanti se, per ogni vettore di impieghi x in $\mathbb{R}^n_+$, data un'espansione di scala $\lambda > 1$,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Si mostri, in primo luogo, che i rendimenti di scala sono costanti se e solo se, per ogni vettore di impieghi x in $\mathbb{R}^n_+$, data una variazione (espansione o contrazione) di scala $\lambda > 0$,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Si verifichi la natura dei rendimenti di scala per le seguenti funzioni di produzione:

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) &= \prod_{i \in \mathcal{N}} x_i^{\theta_i}, \\
f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) &= \left(\min\{\theta_1 x_1, \ldots, \theta_i x_i, \ldots, \theta_n x_n\}\right)^2, \\
f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) &= \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{N}} \theta_i x_i},
\end{aligned}$$

in cui $\theta_i > 0$ per ogni i in $\mathcal{N}$. Se necessario a semplificare, si consideri il caso di due soli fattori di produzione.

Esercizio 3 (Massimo profitto)**.** Un'impresa produce una merce omogenea utilizzando due impianti, ciascuno dei quali impiega, per semplificare, soltanto lavoro. La funzione di produzione del primo impianto è $f(l_1) = \sqrt{l_1}$, con $l_1 \geq 0$, mentre la funzione di produzione del secondo impianto è $f(l_2) = 2\sqrt{l_2}$, con $l_2 \geq 0$. Si noti che quest'ultimo impianto, a parità di impiego di lavoro, consente di ottenere il doppio del prodotto del primo impianto. Si determini la funzione di profitto al prezzo della merce $q > 0$ e al saggio di salario $w > 0$.

Esercizio 4 (Lemma di Hotelling)**.** Una singola merce è prodotta a mezzo di due altre merci. Il prezzo del prodotto è $q > 0$, mentre i saggi di remunerazione dei fattori di produzione sono $w_1 > 0$ e $w_2 > 0$. L'insieme di produzione è convesso e gli eccessi possono essere distrutti liberamente (*free-disposal*). Si ricostruisca l'insieme di produzione a partire dalle seguenti funzioni di profitto:

$$\pi(q, w_1, w_2) = \max\{q - \alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2, 0\},$$

con $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$;

$$\pi(q, w_1, w_2) = \frac{q^2}{w_1 + w_2};$$

$$\pi(q, w_1, w_2) = \frac{1}{\alpha} q \left(\frac{q}{w_1 + w_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (w_1 + w_2)\left(\frac{q}{w_1 + w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

con $1 > \alpha > 0$. Se necessario a semplificare, si consideri il caso di un solo fattore di produzione con saggio di remunerazione $w = w_1 + w_2 > 0$.