TEORIA DEI GIOCHI

GAETANO BLOISE

Strategie miste ed esistenza di un equilibrio di Nash

Estensione mista

Dato un gioco (finito) in forma normale, $G = (S_i, u_i)_{i \in \mathcal{J}}$, l'*estensione mista* del gioco G è data dal gioco in forma normale $\Gamma(G) = (\Sigma_i, u_i)_{i \in \mathcal{J}}$, in cui, per ogni giocatore i in $\mathcal{J}$, Σ_i rappresenta lo spazio di *strategie miste* (cioè di misure di probabilità su S_i),

$$\Sigma_i = \left\{ \sigma_i \in \mathbb{R}_+^{S_i} : \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\},$$

e, con un qualche abuso di notazione, $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ rappresenta l'*utilità attesa*,

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s) \sigma(s).$$

Riguardo alla notazione, per ogni profilo di strategie miste σ in Σ,

$$\sigma(s) = \sigma(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) = \sigma_1(s_1) \cdot \cdots \cdot \sigma_i(s_i) \cdot \cdots \cdot \sigma_n(s_n)$$

è la probabilità del profilo di strategie pure s in S. Inoltre, con un qualche abuso di notazione, la *strategia pura* s_i in S_i può essere interpretata come una particolare strategia mista (degenere) σ_i in Σ_i che assegna l'intera probabilità all'azione s_i in S_i (cioè $\sigma_i(s_i) = 1$ e $\sigma_i(s_i^*) = 0$ per ogni altra strategia pura s_i^* in S_i). Si noti, infine, la fondamentale decomposizione dell'utilità attesa:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i}) \sigma_i(s_i).$$

Reazione ottima

Si considerino le reazioni ottime

$$\beta_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \in \Sigma_i : u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \text{ per ogni } \sigma_i^* \in \Sigma_i\}.$$

e

$$b_i(\sigma_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i^*, \sigma_{-i}) \text{ per ogni } s_i^* \in S_i\}.$$

La corrispondenza $b_i : \Sigma_{-i} \to S_i$ determina le strategie pure ottime, mentre la corrispondenza $\beta_i : \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$ determina le strategie miste ottime.

Caratterizzazione delle reazione ottima. *Per ogni σ_{-i} in Σ_{-i},*

$$\beta_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \in \Sigma_i : \sigma_i(s_i) > 0 \textit{ solo se } s_i \in b_i(\sigma_{-i})\}.$$

In altri termini, una strategia mista è ottima se e solo se assegna probabilità strettamente positiva solo a strategie pure ottime.

Per ogni strategia mista σ_i in Σ_i,

$$\begin{aligned} u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) &= \sum_{s_i^* \in S_i} u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}\right) \sigma_i\left(s_i^*\right) \\ &\leq \sum_{s_i^* \in S_i} \left(\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right)\right) \sigma_i\left(s_i^*\right) \\ &= \left(\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right)\right) \sum_{s_i^* \in S_i} \sigma_i\left(s_i^*\right) \\ &= \max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$u_i\left(\sigma_{-i}\right) = \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) = \max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right).$$

Per provare l'asserto, si osservi che la strategia mista σ_i giace in $\beta_i\left(\sigma_{-i}\right)$ se e solo se

$$u_i\left(\sigma_{-i}\right) = u_i\left(\sigma_{-i}, \sigma_{-i}\right)$$

o, equivalentemente,

$$(\dagger) \qquad \sum_{s_i \in S_i} \left(u_i\left(\sigma_{-i}\right) - u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right)\right) \sigma_i\left(s_i\right) = 0.$$

La restrizione ($\dagger$) richiede che, per ogni strategia pura s_i in S_i,

$$\left(u_i\left(\sigma_{-i}\right) - u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right)\right) \sigma_i\left(s_i\right) = 0,$$

giacché $u_i\left(\sigma_{-i}\right) - u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right) \geq 0$ e $\sigma_i\left(s_i\right) \geq 0$. Dunque, la strategia mista σ_i giace in $\beta_i\left(\sigma_{-i}\right)$ se e solo se, per ogni strategia pura s_i in S_i,

$$\sigma_i\left(s_i\right) > 0 \text{ solo se } u_i\left(\sigma_{-i}\right) = u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right)$$

o, equivalentemente,

$$u_i\left(\sigma_{-i}\right) > u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right) \text{ solo se } \sigma_i\left(s_i\right) = 0.$$

Ciò prova l'enunciato in quanto, per ogni strategia pura s_i in S_i,

$$s_i \in b_i\left(\sigma_{-i}\right) \text{ se e solo se } u_i\left(\sigma_{-i}\right) = u_i\left(s_i, \sigma_{-i}\right).$$

Teorema di Esistenza (Nash)

Il Teorema di Esistenza di Nash si avvale di un fondamentale teorema di analisi matematica.

Teorema di Punto Fisso. *Se $S \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme non vuoto, convesso, chiuso e limitato e $f : S \to S$ è un'applicazione continua, allora esiste un punto s^* in S tale che $f\left(s^*\right) = s^*$.*

Teorema di Esistenza. *L'estensione mista $\Gamma\left(G\right)$ di un gioco (finito) in forma normale $G = \left(S_i, u_i\right)_{i \in \mathcal{J}}$ ammette almeno un equilibrio di Nash σ^* in Σ, cioè un profilo di strategie miste σ^* in Σ tale che, per ogni giocatore i in $\mathcal{J}$,*

$$u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right) \geq u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}^*\right), \text{ per ogni } \sigma_i \in \Sigma_i,$$

o, equivalentemente,

$$\sigma_i^* \in \beta_i\left(\sigma_{-i}^*\right).$$

Si consideri l'applicazione $f : \Sigma \to \Sigma$ definita da

$$f(\sigma)_i(s_i^*) = \frac{\sigma_i(s_i^*) + (u_i(s_i^*, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}))^+}{1 + \sum_{s_i \in S_i} (u_i(s_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}))^+}.$$

Nella definizione dell'applicazione, per ogni x in $\mathbb{R}$, $x^+ = \max\{x, 0\}$. Dal Teorema di Punto Fisso, esiste un profilo di strategie σ^* in Σ tale che $\sigma^* = f(\sigma^*)$. Si noti che, al punto fisso, per costruzione,

$$(*) \qquad \sigma_i^*(s_i^*) \sum_{s_i \in S_i} \left(u_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right)^+ = \left(u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right)^+.$$

Si supponga che, al punto fisso,

$$(**) \qquad \sum_{s_i \in S_i} \left(u_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right)^+ > 0.$$

Dalla condizione (*) segue immediatamente che

$$\left(u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right)^+ = 0 \text{ se e solo se } \sigma_i^*(s_i^*) = 0.$$

Pertanto,

$$\left(u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right)^+ \sigma_i^*(s_i^*) = \left(u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right) \sigma_i^*(s_i^*).$$

Ne deriva che

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s_i^* \in S_i} \left(u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right) \sigma_i^*(s_i^*) \\ &= \sum_{s_i^* \in S_i} \left(u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right)\right)^+ \sigma_i^*(s_i^*) \\ &> 0, \end{aligned}$$

una contraddizione. Se ne deduce che la condizione (**) non può essere soddisfatta e, dunque,

$$u_i\left(s_i^*, \sigma_{-i}^*\right) - u_i\left(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*\right) \leq 0, \text{ per ogni } s_i^* \in S_i.$$

Ciò prova, per la caratterizzazione della reazione ottima, che il profilo di strategie σ^* in Σ costituisce un equilibrio di Nash del gioco $\Gamma(G)$.