TEORIA DEI GIOCHI, I

GAETANO BLOISE

Esercitazione, 11 maggio 2009

Dominanza. *In un gioco in forma normale, $G = (S_i, u_i)_{i \in \mathcal{J}}$, la strategia s_i in S_i è* strettamente dominata *se esiste una strategia alternativa s_i^* in S_i tale che*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \text{ per ogni } s_{-i} \in S_{-i}.$$

Inoltre, la strategia s_i in S_i è debolmente dominata *se esiste una strategia alternativa s_i^* in S_i tale che*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \text{ per ogni } s_{-i} \in S_{-i},$$

e

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \text{ per qualche } s_{-i} \in S_{-i}.$$

Equilibrio di Nash. *In un gioco in forma normale, $G = (S_i, u_i)_{i \in \mathcal{J}}$, un profilo di strategie s^* in S costituisce un* equilibrio di Nash *se, per ogni giocatore i in $\mathcal{J}$,*

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right), \text{ per ogni } s_i \in S_i.$$

Efficienza. *In un gioco in forma normale, $G = (S_i, u_i)_{i \in \mathcal{J}}$, un profilo di strategie s^* in S è* efficiente (in senso paretiano) *se non esiste un profilo di strategie alternativo s^{**} in S tale che, per ogni giocatore i in $\mathcal{J}$,*

$$u_i\left(s_i^{**}, s_{-i}^{**}\right) \geq u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right)$$

e, per qualche giocatore i in $\mathcal{J}$,

$$u_i\left(s_i^{**}, s_{-i}^{**}\right) > u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right).$$

Esercizio 1 (Classe di giochi)**.** Si consideri la classe di giochi descritta da

$$\begin{pmatrix} a, a & c, d \\ d, c & b, b \end{pmatrix},$$

in cui a, b, c e d rappresentano valori distinti. Attraverso diseguaglianze, si identifichino i valori (se esistono) per cui il gioco ammette un solo equilibrio di Nash, due equilibri di Nash, più di due equilibri di Nash e nessun equilibrio di Nash.

Esercizio 2 (Divisione di una somma monetaria)**.** Due individui negoziano la divisione di una somma monetaria, per semplificare, di 10 euro. Ciascun individuo i in $\mathcal{J} = \{1, 2\}$ avanza una proposta s_i in $S_i = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Se la somma delle proposte non è superiore a 10 euro, si procede alla spartizione secondo le proposte. Se la somma delle proposte è superiore a 10 euro e le proposte sono diverse, la somma viene ripartita in modo da soddisfare l'individuo che ha formulato la proposta minore e attribuendo la rimanente parte all'altro individuo. Se la somma delle proposte è superiore a 10 euro e le due proposte sono identiche, ciascun individuo riceve 5 euro. Si descrivano gli insiemi delle strategie che resistono alla prodedura di eliminazione iterata di strategie strettamente dominate e delle strategie che resistono alla procedura di eliminazione iterata di strategie *debolmente* dominate. Si determini l'insieme degli equilibri di Nash.

Esercizio 3 (Oligopolio secondo Cournot)**.** Si considerino n imprese identiche che competono secondo Cournot. La domanda inversa di mercato è data da

$$p(y) = \max\{a - by, 0\},$$

con $a > 0$ e $b > 0$. Il costo unitario di produzione è c, con $a > c > 0$. Si determini l'equilibrio di Nash simmetrico. Cosa accade al prezzo di equilibrio al crescere di n?

Esercizio 4 (Contribuzione volontaria a un bene pubblico)**.** Ciascun giocatore i in $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$ dispone di un reddito monetario unitario da impiegare per contribuire volontariamente a un bene pubblico, $g_i \geq 0$, e per consumo privato, $c_i \geq 0$, soggetto a vincolo di bilancio,

$$g_i + c_i \leq 1.$$

Le preferenze di ciascun giocatore i in $\mathcal{J}$ sono date da

$$v_i\left((g_j)_{j\in\mathcal{J}}, c_i\right) = \sqrt{\sum_{j\in\mathcal{J}} g_j} + \sqrt{c_i}.$$

Si determini l'equilibrio di Nash (simmetrico). Si descriva interamente l'insieme dei profili di strategie efficienti. Si spieghi la natura dell'inefficiente allocazione delle risorse all'equilibrio di Nash.