TEORIA DEI GIOCHI, II

GAETANO BLOISE

Esercitazione, 25 maggio 2009

Esercizio 1 (Asta al primo prezzo, o discendente)**.** Un oggetto è venduto all'asta. La valutazione monetaria soggettiva del partecipante i in $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ all'asta è $v_i > 0$, con

$$v_1 > v_2 > v_3 > \cdots > v_n.$$

Ciascun partecipante i in $\mathcal{J}$ sottopone un'offerta monetaria $b_i \geq 0$ al banditore in busta chiusa. Il profilo di offerte è $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$. Sia $\bar{b} \geq 0$ la maggiore tra le offerte dei partecipanti. Il partecipante $i\,(b)$ in $\mathcal{J}$ che si aggiudica l'asta è l'individuo con il minore indice i in $\mathcal{J}$ tra coloro che hanno sottoposto l'offerta maggiore,

$$i\,(b) = \min\left\{i \in \mathcal{J} : b_i = \bar{b}\right\}.$$

L'utilità di un partecipante che si è aggiudicato l'asta è $u_i = v_i - \bar{b}$; l'utilità di un partecipante che non si è aggiudicato l'asta è $u_i = 0$. Si mostri che, in ogni equilibrio di Nash, è il partecipante 1 ad aggiudicarsi l'asta. Si mostri, inoltre, che, in ogni equilibrio di Nash, l'offerta maggiore $\bar{b}$ soddisfa $v_1 \geq \bar{b} \geq v_2$ e che almeno due partecipanti hanno sottoposto l'offerta maggiore. Si mostri, infine, che ogni profilo di offerte, che soddisfa le proprietà necessarie sopra enunciate, costituisce un equilibrio di Nash.

Esercizio 2 (Asta al secondo prezzo, o ascendente)**.** Un oggetto è venduto all'asta. La valutazione monetaria soggettiva del partecipante i in $\mathcal{J} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ all'asta è $v_i > 0$, con

$$v_1 > v_2 > v_3 > \cdots > v_n.$$

Ciascun partecipante i in $\mathcal{J}$ sottopone un'offerta monetaria $b_i \geq 0$ al banditore in busta chiusa. Sia $\bar{b} \geq 0$ la maggiore tra le offerte dei partecipanti e sia $\hat{b}$ la seconda maggiore tra le offerte dei partecipanti ($\hat{b} = \bar{b}$ se $b_i = \bar{b}$ per ogni i in $\mathcal{J}$). Il partecipante $i\,(b)$ in $\mathcal{J}$ che si aggiudica l'asta è l'individuo con il minore indice i in $\mathcal{J}$ tra coloro che hanno sottoposto l'offerta maggiore,

$$i\,(b) = \min\left\{i \in \mathcal{J} : b_i = \bar{b}\right\}.$$

L'utilità di un partecipante che si è aggiudicato l'asta è $u_i = v_i - \hat{b}$ (si noti che il vincitore deve corrispondere una somma pari solo alla seconda maggiore tra le offerte); l'utilità di un partecipante che non si è aggiudicato l'asta è $u_i = 0$. Qual è la maggiore offerta $\bar{b}$ in un equilibrio di Nash? Si costruisca un equilibrio nel quale il partecipante 1 non si aggiudica l'asta. Si mostri che l'offerta $b_i = v_i$ è una strategia debolmente dominata per ogni partecipante i in $\mathcal{J}$. Esistono strategie strettamente dominate? Si determini completamente l'insieme degli equilibri di Nash nel caso di due soli partecipanti, $\mathcal{J} = \{1, 2\}$.

Esercizio 3 (Guerra di logoramento)**.** Due parti, $\mathcal{J} = \{1, 2\}$, negoziano la risoluzione di un qualche contenzioso. Se il contenzioso si risolve a favore della parte i in

$\mathcal{J}$, essa ne riceve un beneficio pari a $v_i > 0$. Il contenzioso si risolve a favore dell'altra parte nella misura in cui una parte cede. (Se le due parti cedono al medesimo tempo, il contenzioso si risolve a favore di ciascuna parte con uguale probabilità.) Il protrarsi del tempo senza risoluzione del contenzioso è costoso per entrambe le parti. Sia $t_i \geq 0$ l'istante nel quale la parte i in $\mathcal{J}$ decide di cedere. L'utilità della parte i in $\mathcal{J}$ è

$$u_i\left(t_i, t_{-i}\right) = \begin{cases} v_i - t_{-i}, & \text{se } t_i > t_{-i}, \\ -t_i, & \text{se } t_{-i} > t_i, \\ (v_i/2) - t_i, & \text{se } t_i = t_{-i}. \end{cases}$$

Si studino le funzioni di reazione ottima e si determinino gli equilibri di Nash.

Esercizio 4 (Equilibrio di Nash perfetto)**.** In un gioco in forma normale, $G = (S_i, u_i)_{i \in \mathcal{J}}$, un equilibrio di Nash s^* in S si dice *perfetto* se, per nessun giocatore i in $\mathcal{J}$, s_i^* in S_i è una strategia debolmente dominata. Si determino tutti gli equilibri di Nash perfetti nel seguente gioco:

$$\begin{pmatrix} 2,2 & -1,3 & 2,2 \\ 2,-1 & 0,0 & 3,1 \\ 2,1 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}.$$