GEOMETRI LOBACHEVSKY

OLEH :
Hj. Nurbaiti
Farah Diba

DOSEN PENGAMPU :
Prof. DR. Zulkardi, M.I.Komp, M.Sc
Dra. Nyimas Aisyah, M.Pd
Drs.Somakim, M.Pd

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
PROGRAM PASCASARJANA UNIVERSITAS SRIWIJAYA
2006 / 2007

PENGENALAN GEOMETRI NON EUCLIDES

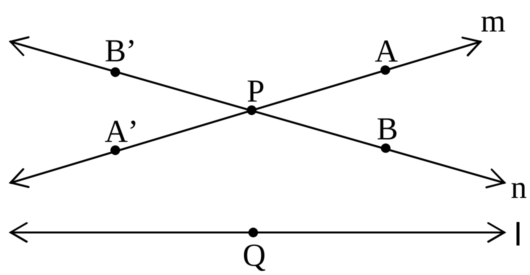
Geometri Lobachevsky
Postulat Kesejajaran Lobachevskian :

Ada sedikitnya dua garis dapat ditentukan melalui titik yang diketahui dan tidak terletak pada garis

Teorema Nonmetrical
Teorema 1

Sembarang garis keseluruhan termuat didalam interior dari beberapa sudut

Bukti :



Misal l suatu garis dan titik P tidak pada l
Melalui Postulat Kesejajaran Lobachevskian :
Pasti ada garis yang berbeda m, n yang melalui P dan sejajar l.
Garis m dan n membagi bidang menjadi 4 daerah. Masing-masing merupakan sudut interior.
Daerah-daerah ini ditandai sebagai interior dari ∠APB, ∠APB', ∠A'PB, ∠A'PB' dimana P diantara A dan A' pada m, dan P diantara B dan B' pada n.
Misal Q sebarang titik pada l.
Ketika l tidak bertemu m atau n, Q juga tidak pada m atau n
Jadi, Q berada di interior pada salah satu keempat sudut tersebut, anggaplah ∠A'PB
Sekarang, dimana l dapat diletakkan ?
Ketika Q berada di interior ∠A'PB, dan ketika l tidak bertemu sisi PA', PB.
Jelaslah, l berada didalam ∠A'PB.Dengan demikian l dimuat secara keseluruhan didalam interior ∠A'PB.

Corollary

Ada tak berhingga banyak garis sejajar yang dapat ditentukan melalui suatu titik yang diketahu tidak terletak pada garis.

Bukti :

Misal diketahui garis l, dan titik P tidak pada l.
Gunakan teorema 1; Misal R sebarang titik didalam interior ∠APB,
maka garis PR (termasuk titik P) secara keseluruhan termuat didalam interior ∠APB dan ∠A'PB'.Dan PR tidak memotong l ,karena l termuat didalam interior ∠A'PB.

Dengan demikian, PR sejajar l.
Akibatnya, ada banyak garis tak berhingga seperti garis PR.

Jumlah Sudut Suatu Segitiga didalam Geometri Lobachevskian

Lemma 1

Penjumlahan dua sudut suatu segitiga kurang dari atau sama dengan sudut luar terjauhnya.

Bukti.

Memperhatikan Δ ABC. Dengan Teorema Saccheri-Legendre.

$\angle A + \angle B + \angle C \leq 180^\circ$

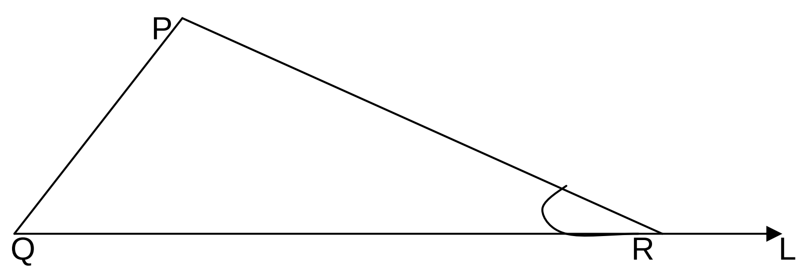
kedua ruas dikurangi dengan sudut C , kita dapatkan

$\angle A + \angle B \leq 180^\circ - \angle C$

Lemma sudut luar pada C = $180^\circ - \angle C$

Lemma 2

Misal l suatu garis, titik P tidak berada di garis l, dan titik Q berada di garis l. Misal diberikan garis PQ sebagai sisinya.
Kemudian di sana ada titik R di l, pada sisi PQ yang diketahui, sedemikian hingga $\angle$ PRQ adalah sudut kecil seperti yang kita lihat.



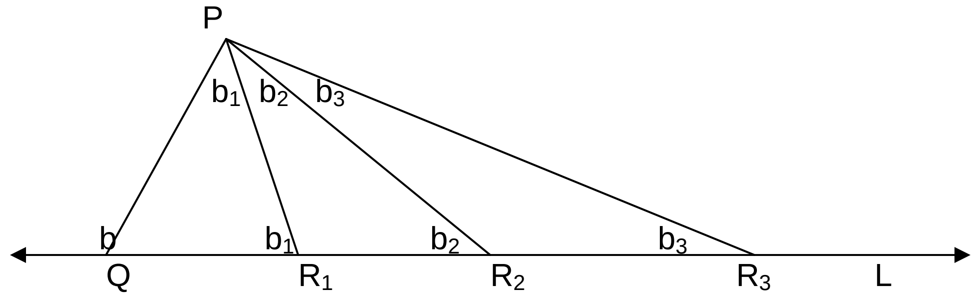
GAMBAR 4.4

Bukti.

Buat sudut-sudut yang lain (berapapun ukuran sudutnya). Kita harus memperhatikan (gambar 4.4) di sana terdapat titik R pada garis l, yang terbentuk dari sisi PQ, sedemikian hingga $\angle$ PRQ < a
Pertama kita harus membuat langkah-langkah untuk mendapatkan berapa besar sudut-sudut tersebut.

$\angle PR_1Q_1$, $\angle PR_2Q_2$ …

Setiap sudut yang dibuat tidak lebih besar dari setengahnya dari hasil yang telah didapat.



Gambar 4.5

Misalkan R_1 adalah titik l pada sisi PQ sehingga $QR_1 = PQ$ (gambar 4.5). Gambar PR_1 Maka ΔPQR_1 sama kaki, dan

$\angle QPR_1 = \angle PR_1Q = b_1$

Misal b adalah sudut luar ΔPQR_1 pada Q.

Dengan lemma 1 $\quad b_1 + b_1 = 2b_1 \leq b$,

sehingga $\quad b_1 \leq ½\, b \quad (1)$

Sekarang bentuklah sudut baru dengan langkah yang sama. Perpanjangan QR_1 melalui R_1 dan R_2 sehingga $R_1R_2 = PR_1$. Gambarkan PR_2, maka ΔPR_1R_2 sama kaki dan

$\angle R_1PR_2 = \angle PR_2R_1 = \angle PR_2Q = b_2$

Dengan Lemma 1 $\quad b_2 + b_2 = 2b_2 \leq b_1$

Sehingga $\quad b_2 \leq ½\, b_1$

Dari persamaan (1) di dapat: $\quad b_2 \leq ½^2\, b$

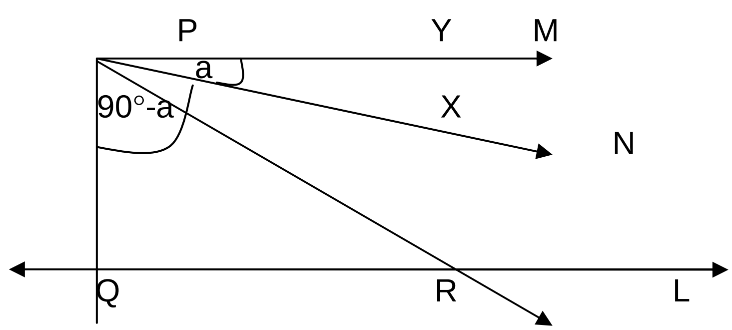
Ulangi proses “ pembagian dua “ n, sehingga di dapat titik Rn di l, pada sisi PQ, sehingga

$b_n = \angle PR_nQ \leq ½^n\, b$.

Hasilnya. Nilai n sangat besar $½^n\, b < a$. Kemudian $\angle PR_nQ < a$. Sehingga teorema berlaku dengan $R = R_n$.

Teorema 2

Ada sebuah segitiga mempunyai jumlah sudut kurang dari 180°.



Gambar 4.6

Bukti :
Buat garis l dan titik P tidak pada di l. Kita memperoleh garis m melalui P sejajar l .
PQ tegak lurus ke l pada Q dan m tegak lurus ke PQ pada P. Dengan postulat kesejajaran Lobachevskian, ada garis lain n melalui P sejajar l.
Salah satu sudut yang terbentuk oleh garis n dengan PQ harus lancip. Ambil X titik di n sedemikian hingga $\angle$ QPX lancip. Y titik di garis m pada sisi yang sama seperti titik X.
Andai a = $\angle$ XPY. Maka $\angle$ QPX = 90° - a

Sekarang gunakan Lemma 2. Ambil R titik pada l, pada bagian PQ yang memuat X, sedemikian hingga $\angle$ PRQ < a. Perhatikan ΔPQR. Kita dapatkan

$$\angle PQR = 90^\circ$$
$$\angle QRP = < a$$
$$\angle RPQ < \angle XPQ = 90^\circ - a$$

Ditambahkan, kita peroleh

$$\angle PQR + \angle QRP + \angle RPQ < 90^\circ + a + 90^\circ - a$$
$$\angle PQR + \angle QRP + \angle RPQ < 180^\circ$$

Jadi ΔPQR mempunyai jumlah sudut kurang dari 180°, terbukti.

Teorema 3

Jumlah sudut dari setiap segitiga tidak lebih dari 180°.

Bukti :
Dengan teorema 2, dimana ada sebuah segitiga mempunyai jumlah sudut kurang dari 180°. Oleh karena sama adalah benar untuk setiap segitiga (Ch. 3, Th. 6, Cor. 2)

Corollary 1

Jumlah sudut dari setiap segi empat kurang dari dari 360°.

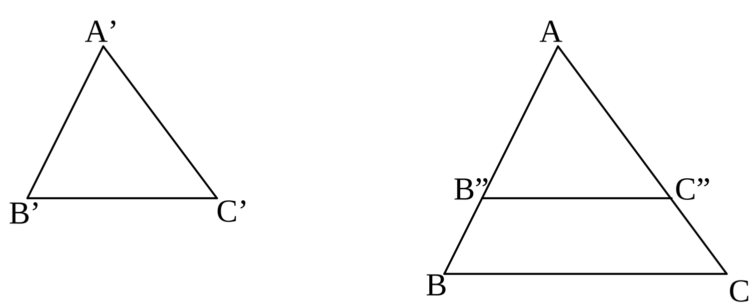
Corollary 2

Tidak ada persegi panjang.

Apakah Kesamaan Segitiga-segitiga ada di Geometri Lobachevskian

Teorema 4

Dua segitiga kongruen, jika sudut-sudut yang bersesuaian sama



Bukti :
Anggap teorema ini salah.

Maka pasti ada dua segitiga ΔABC dan ΔA'B'C' ∋ $\angle$A = $\angle$A', $\angle$B = $\angle$B', $\angle$C = $\angle$C' tetapi segitiga tersebut tidak konruen.

Maka, $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ (jika tidak, segitiga tersebut kongruen melalui Sudut Sisi Sudut)

Sama juga dengan $\overline{AC} \neq \overline{A'C'}$ dan $\overline{BC} \neq \overline{B'C'}$.

Perhatikan tiga segmen $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ dan $\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{B'C'}$.
Salah satu dari tiga segment tersebut pasti memuat dua segment yang lebih besar dari dua segment yang bersesuaian dari ketiga segment lainnya.

Akibatnya , $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ dan $\overline{AC} > \overline{A'C'}$

Jadi, dapat ditemukan B" pada $\overline{AB}$ dan C" pada $\overline{AC}$ ∋ $\overline{A'B'} = \overline{AB''}$ dan $\overline{A'C'} = \overline{AC''}$
Konsekuensinya, ΔAB"C" ≅ ΔA'B'C'
Sehingga, $\angle$AB "C" = $\angle$B' = $\angle$B
Karena itu, $\angle$BB"C" pengganti $\angle$B . sama juga dengan, $\angle$B"C"C pengganti $\angle$C.
Untuk itu, empat persegi BB"C"C mempunyai jumlah sudut 360^o, yang mana kontradiksi dengan Teorema 3 Corolarry.

Teori Daerah (Area) Lobachevskian

Bidang (area) segitiga didefinisikan mengikuti sifat-sifat (property)

(a) Positivity. Untuk masing-masing segitiga mempunyai hubungan unik yang ditentukan oleh bilangan real positif disebut daerah (area)
(b) Invariance Under congruence. Segitiga-segitiga kongruen mempunyai daerah (area) yang sama
(c) Additivity. Jika segitiga T dibagi menjadi 2 segitiga T1 dan T2 oleh garis yang ditarik melalui titik puncak dari sisi yang dihadapannya ,maka daerah T adalah jumlah dari daerah T1 dan T2.

Akibatnya setiap proses untuk pengukuran bidang yang ditentukan oleh sebuah nilai real fungsi didefinisikan untuk semua segitiga yang memenuhi sifat (property) (a),(b),dan (c). Ini menganjurkan agar kita menemukan konsep pengukuran daerah atau daerah fungsi segitiga dengan mengartikan property-property tersebut.

Definisi :
Suatu fungsi yang ditentukan untuk setiap segi tiga khusus bilangan real dengan menggunakan property (a),(b),(c) yang memenuhi. Maka fungsi itu disebut sebagai daerah fungsi atau daerah pengukuran untuk segitiga. Jika μ adalah suatu fungsi seperti itu dan ABC sebuah segitiga,μ(ABC) merupakan nilai dari Δ ABC ,dan disebut daerah atau ukuran dari ΔABC yang ditentukan oleh μ.

Definisi ini, tentunya tidak terikat oleh geometri Lobachevskian , definisi ini menerapkan geometri netral . Kenyataannya dalam geometri Euclidean, rumus yang dikenal (luas daerah = ½ bh) untuk daerah segitiga juga telah meliputi daerah fungsi : Kita menunjukkan setiap segitiga sebagai ukuran setengah hasil kali alas dan tinggi .

Kita lanjutkan dengan mengamati kelengkapan Addivity (c), derah fungsi bisa diperluas sampai bilangan bulat terbatas

Theorem 5 (Finite additivity):

jika suatu segitiga Δ gabungan dari himpunan terbatas yang tidak beririsan (non overlapping) $\Delta 1, \Delta 2,, ..., \Delta n$. Maka untuk setiap daerah fungsi μ ,

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta 1) + ... + \mu(\Delta n)$$

. Hasilnya sama pentingnya dalam geometri Euclidean dan Lobachevskian, sebenarnya ini adalah teorema geometri netral.

Kita memperkenalkan daerah fungsi dalam geometri Lobachevskian secara abstrak tanpa menujukkan contoh khusus. Ada satu contoh bahwa hal itu sepenting rumus daerah segitiga yang kita kenal dari geometri Euclidean , tapi paling natural ditunjukan dalam bentuk sudut-sudut suatu segitiga. Kita nyatakan ini secara formal dalam definisi berikut :

Definisi

Kekurangn (the defect) dari ΔABC adalah 180 - ($\angle$ A + $\angle$ B + $\angle$C).

Disini $\angle$A, $\angle$B, dan $\angle$C diambil sebagai sudut pengukuran dari sudut yang diindikasi ,oleh karena itu kekurangan dari suatu segitiga adalah bilangan real yang sederhana,bukan sebuah bilangan derajat (degrees).

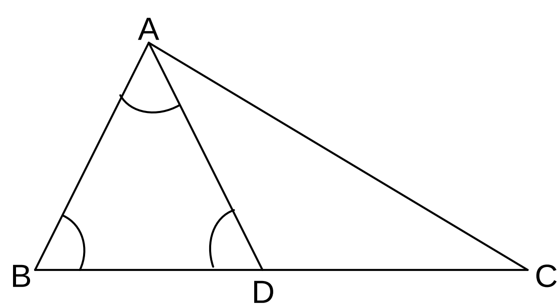
Catatan bahwa kekurangan dari suatu segitiga terindikasi pada jumlah yang mana jumlah sudutnya tak mencapai 180°.

Teorema 6

Kekurangan (the defect) adalah suatu daerah fungsi untuk segitiga.

Bukti:

Property (a) mengikuti teorema 3. Property (b) segitiga-segitiga yang kongruen mempunyai sudut-sudut yang bersesuain sama,oleh karena itu jumlah sudut nya sama dan kekurangannya (defects) sama.



Gambar 4.10

Untuk menetapkan property (c) , Diketahui ΔABC dan D titik pada BC, AD membagi Δ ABC menjadi ΔABD dan ΔADC.
Jumlah kekurangan dari 2 segitiga sembarang adalah :
$180 - (\angle BAD + \angle B + \angle BDA) + 180 - (\angle CAD + \angle C + \angle CDA)$
Dengan memperhatikan $\angle BDA + \angle CAD = 180$
Kita mempunyai jumlah dari kekurangan Δ ABD dan Δ ADC adalah

$$180 - (\angle BAD + \angle CAD + \angle B + \angle C) = 180 - (\angle BAC + \angle B + \angle C)$$

yang mana kekurangan dari Δ ABC.

Teorema ini memberi tahu bahwa ada satu daerah fungsi . Kita secara alami menyadari jika ada daerah fungsi lain, dan betapa banyak jenisnya . Suatu metode trivial ini membentuk (constructing) daerah fungsi baru yang ditentukan dengan mengikuti teorema, yang mana konsekuensinya langsung dari definisi daerah fungsi.

Teorema 7

Setiap hasil kali sebuah daerah fungsi dengan bilangan konstan positif adalah sebuah daerah fungsi juga.

Perkalian dari daerah fungsi oleh suatu bilangan positif konstan dapat mengubah bagian pengukuran (yaitu setiap segitiga yang pengukurannya adalah 1),tetapi bukan pembanding dari pengukuran segitiga. Dalam kekurangan ini ,memiliki suatu pengukuran berarti (geometrical significance) yang sederhana,untuk bentuk khusus dari definisi mengenai kekurangan tergantung dari kesepakatan dasar untuk pengukuran sudut –sudut dalam bentuk derajat. Jika kita ambil unit yang berbeda untuk ukuran sudut-sudut dan mendefinisikan kekurangan dalam cara yang alami,kita mendapatkan perkalian yang konstan dari kekurangan itu,sebagai yang didefinisikan. Sebagai contoh, andaikata kita mengganti unit mengukur sudut dari derajat ke menit Hal-hal ini menjadi bahan untuk didiskusikan : (1) setiap ukuran sudut akan dikalikan dengan 60 : (2) bilangan pokok (key number) 180 akan digantikan dengan 60 kali 180 atau 10,800. Jadi itu definisi pendekatan dari defect akan menjadi 60 kali defect sama dengan definisi asli.

Teori terakhir, sayangnya, tidak ada penyelesaian dari pertanyaan kita yang menyangkut macam-macam kemungkinan dari daerah fungsi . Kita lebih memperhatikan kemungkinan sebuah daerah fungsi yang dikalikan dengan tidak konstan dari defect. Kita mungkin merasa bahwa defect dikeluarkan dari sebuah tak tentu ujung pangkalnya dan tidak mungkin menjadi sebuah daerah fungsi yang khas bahwa daerah fungsi lain mungkin berubah menjadi yang tidak proposional . Jika ini terjadi mungkin ada dua segitiga yang mempunyai daerah yang sama sebagai ketentuan satu daerah fungsi. Pada prakteknya, urusan ini akan sungguh sukar, harga sebuah rumah mungkin bergantung pada sistem yang digunakan untuk mengukur itu. Untungnya, tidak ada hal yang dapat terjadi di geometri Lobachevskian.

Teorema 8

Dua daerah fungsi adalah proposional

Ini menarik untuk di catat bahwa dalam geometri dimensi tiga Euclidean , jumlah sudut segitiga berbentuk bola besar dari 180°, dan bidang dari sebuah segitiga bola didefinisikan menjadi kelebihan, jadi jumlah dari ukuran derajat adalah sudut kurang 180.

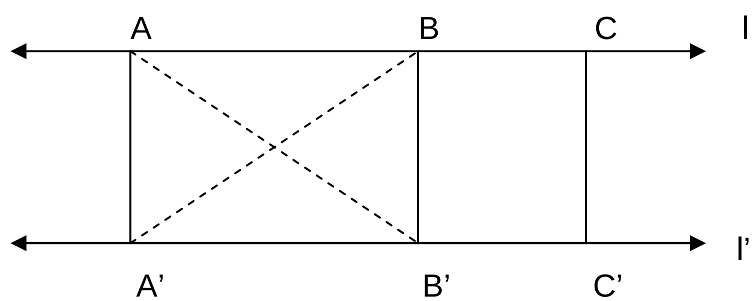
Kita menyimpulkan Teorema 8 juga benar dalam geometri Euclidean dan membutuhkan validasi yang dikenal teori bidang (area) Euclidean .

Kesejajaran Dan Jarak yang sama dari Garis-Garis

Dalam geometri Euclidean, satu ciri penting dari garis sejajar adalah bahwa mereka senantiasa mempunyai jarak yang sama . Hal tersebut tidak sama dengan kasus dalam geometri Lobachevskian.

Teorema 9

Dua garis sejajar tidak senantiasa mempunyai jarak yang sama.



Gambar 4.11

Bukti :

Kita akan menunjukan bahwa untuk dua garis sejajar l , l’ tidak ada tiga titik seperti pada garis l yang mana jaraknya sama dari garis l’.

Ambil A,B,C pada l, dengan B diantara A dan C. Dari A ,B,C tarik garis tegak lurus ke l’, memotong l’ di A’,B’, dan C’.

Diduga AA’ = BB’ = CC’. Dari AA’ = BB’, $\angle$ AA’B’ = $\angle$BB’A’, dan A’B’ = B’A’.

Maka Δ AA′B′ $\cong$ Δ BB′A. Oleh karena AB′ = BA′, maka BB′ = AA′ dan BA = AB kita dapatkan

$$\Delta\ AB'B \cong \Delta\ BA'A$$ .Akibatnya $\angle A'AB = \angle B'BA$;

Karena itu “Sudut-sudut Puncak” dari segi empat AA′B′B adalah sama.

Alasan yang sama digunakan pada segi empat CC′B′B menghasilkan

$$\angle C'CB = \angle B'BC.$$

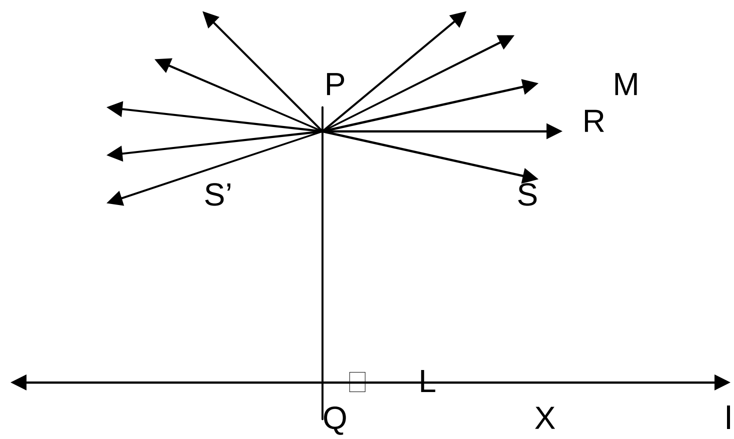
Jumlahkan dua persamaan terakhir

$$\angle A'AB + \angle C'CB = \angle B'BA + \angle B'BC = 180°$$

Jadi jumlah sudut segi empat AA′C′C adalah 360°, kontradiksi dengan Cor 1 dari Teo 3 .

Kita menyimpulkan bagian ini dengan diskusi macam-macam pasangan garis sejajar. Melihat pembuktian teorema ,jika dua garis sejajar hanya dua kasus yang dapat timbul : (a) ada dua titik pada satu garis yang sama jaraknya dari garis lain ; (b) tidak ada dua titik di satu garis yang jaraknya sama dari garis lain.

Kasus pertama timbul jika dan hanya jika mempunyai sebuah garis persekutuan yang tegak lurus. Pada kasus kedua dapat menunjukkan bahwa garis – garis tersebut adalah asymptoot .



Gambar 4.12

Bila titik P tidak pada garis l

PQ ⊥ l di Q, dan m ⊥ PQ di P (gambar 4.12). Andaikan garis PR ll l dan ∠QPR adalah sudut lancip. Garis – garis tersebut melalui P dan memotong l atau sejajar ke l. X pada l sedemikian hingga jaraknya ke PQ sama jaraknya ke R ; kemudian garis PX melalui P memotong l .Sekarang X bergerak mendekati Q pada l . Sehingga ∠QPX < ∠QPR.Karena itu ∠QPX mendekati sekecil-kecilnya . Kemudian PX akan mendekati PS seperti X . Dapat ditunjukan bahwa PS tidak memotong l ,tetapi batas dari garis PX yang memotong l . Dikatakan sebagai batas sejajar ke l. Simetris dengan garis PS′,yang juga batas sejajar ke l ,sehingga ∠QPS′ = ∠QPS dan S′ berlawanan dengan S (lihat gambar) .Kesimpulan : PS dan PS′ adalah sejajar terhadap garis l dan garis – garis lain yang melalui titik P memotong l dari garis – garis l melalui P, beda dengan PS dan PS′ yang tidak memotong l.

Kesimpulan ini bagian dari penjelasan kita mengenai geometri Lobachevskian.

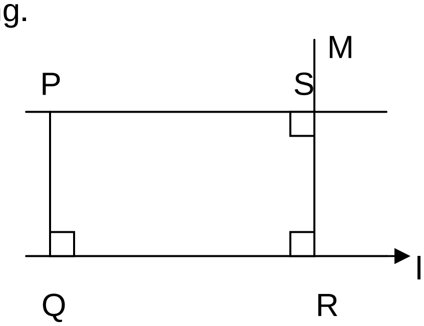
Apakah ada Geometri Netral lain .

Kami telah selesai mengenalkan Goemetri Lobachesvkian,dan kami meminta keterangan kemungkinan teori geometri lain yang berbeda dengan teori Euclids.Khususnya, kami bertanya apakah perbedaan geometri netral dari geometri euclidean dan lobachevskian.Tampaknya jawabannya adalah tidak. Jawaban ini adalah benar, tapi memerlukan justifikasi lebih dari sebuah kata. Pertama, marilah kita lihat masalah disini, pertanyaan itu tidak berarti. Mengamati keduanya walaupun geometri Euclidean dan Lobachevskian saling kontradiksi, kemungkinan ada geometri netral yang mana kontradiksi keduanya, satu diantara non Euclidean dan non Lobachevskian. Kemungkinan Geometri netral adalah "sebagian Euclidean " dan " sebagian Lobachevskian "

Untuk membuat ini dapat kami katakan, di geometri netral garis l dan titik P memenuhi sifat (property) Kesejajaran Euclidean jika ada tepat satu garis melalui titik P sejajar garis l; dan garis l dan titik P memenuhi sifat (property) Kesejajaran Lobacheskian jika ada sedikitnya dua garis melalui titik P dan sejajar garis l. Di geometri netral kami mengetahui bahwa ada sedikitnya satu garis melalui sebuah titik eksternal sejajar garis yang diketahui (Ch.2, Th.2, Cor.3). Oleh karena itu setiap bentuk pasangan sebuah garis dan sebuat titik eksternal memenuhi sifat (property) salah satu Kesejajaran Euclidean atau Lobachevskian. Tapi kami tidak mengetahui bahwa Geometri netral adalah "homogeneous" dalam hal ini : mungkin sama dari pasangan " titik-garis "yang memenuhi Euclidean dan Lobachevskian. Ini sebutan untuk pengertian homogenetik (sama jenis) dari geometri netral seperti hal jumlah sudut suatu segitiga, menyinggung akhir bagian 4 dari bab 3. Ini memberi kesan bahwa " Sifat (property) Kesejajaran sama jenis " adalah mengurangi " jumlah sudut sama jenis ". Ini juga untuk menjustifikasi itu kami akan memulai dengan pertimbangan implikasi dari sifat kesejajaran Euclidean .

Teorema 10

Dalam geometri netral, ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi sifat Kesejajaran Euclidean . Maka ada sebuah persegi panjang.



Bukti :

Diketahui garis l dan titik P. PQ tegak lurus l pada Q. Ambil titik R pada l, berbeda dari Q, Buat garis m tegak lupus l pada R . ter akhir PS tegak lurus m pada S. Maka PQRS mempunyai sudut situ-siku di Q,R,S.Kita tunjukan PQRS adalah sebuah persegí panjang . PS dan garis l tegak lurus garis m, PS sejajar garis l (Ch.2, Th.2, Cor.1). Karena garis l dan titik P memenuhi property kesejajaran Euclidean yang penting, PS hanya lah garis melalui P sejajar garis l. Tetapi garis tegak lurus PQ pada P juga harus sejajar l.Oleh karena itu PS sama dengan QR dan PQRS adalah sebuah persegi panjang (Ch.3, Sec 3)

Corollary

Dalam geometri netral, ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi property Kesejajaran Euclidean. Maka setiap segitiga mempunyai jumlah sudut 180°.

Bukti:
Akibat dari teorema persegi panjang dan hasil mengikuti Th 5 Ch 3.

Teorema 11

Dalam geometri netral, ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi property Kesejajaran Lobachevskian. Maka ada sebuah segitiga yang mempunyai jumlah sudut kurang dari 180°.

Bukti:
Sudah dibuktikan pada teorema 2, bahwa di geometri Lobachevskian ada sebuah segitiga yang mempunyai jumlah sudut kurang dari 180°.

Corollary

Dalam geometri netral ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi property Kesejajaran Lobachevskian. Maka jumlah sudut setiap segitiga kurang dari 180°.

Bukti :

Dari teorema ini ada sebuah segitiga yang mempunyai jumlah sudut kurang dari 180° dan juga berlaku untuk setiap segitiga (Ch.3,Th .6,Cor.2).

Sekarang kita dapat cepat mendapatkan kesamaan geometri netral sebagai property kesejajaran.

Teorema 12

Dalam geometri netral , ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi property Kesejajaran Euclidean. Maka setiap garis dan setiap titik eksternal memenuhi property Kesejajaran Euclidean,itu adalah Geometri Euclidean.

Bukti :

Andai teorema salah .Lalu ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi property kesejajaran Lobachevskian. Dengan Corollary terakhir setiap segitiga mempunyai jumlah sudut yang kurang dari 180°, tapi a kibat hipotesis (Th.10, Cor.) bahwa setiap segitiga mempunyai jumlah sudut 180°. Ini kontradiksi dengan teorema.

Corollary 1

> Dalam geometri netral , ada sebuah garis dan sebuah titik yang memenuhi property Kesejajaran Lobachevskian. Maka setiap garis dan setiap titik eksternal memenuhi property Kesejajaran Lobachevskian ; itu adalah geometri Lobachevskian.

Bukti:

Misalkan garis l dan titik P memenuhi property Kesejajaran Lobachevskian . Ambil garis l' dan titik eksternal P' . Maka l' dan P' tidak dapat memenuhi property Kesejajaran Euclidean ; dengan kata lain kontradiksi dengan teorema.

Kita langsung berpendapat mengikuti klasifikasi penting dari geometri netral

Corollary 2

> Setiap geometri netral adalah salah satu Euclidean atau Lobachevskian.

Corollary 3

> Geometri netral adalah Euclidean atau Lobachevskian memiliki pengertian sebuah segitiga mempunyai jumlah sudut 180° atau kurang dari 180°

Bukti :
Dalam geometi netral, Ada sebuah segitiga mempunyai jumlah sudut sama dengan 180°.Maka geometri tidak dapat menjadi Lobachevskian dan harus menjadi Euclidean .Co. 2 .

Corollary 4

Geometri netral yang mana memuat persegi panjang adalah Euclidean.

Kami menutup bagian ini dengan beberapa ucapan didalam dua ide penting.

Pertama, mempertimbangkan hasil dasar kami didalam corollary 2 diatas, setiap geometri netral itu adalah euclidean atau lobacheskian. Ini adalah pembagian prinsip. Ini menyatakan bahwa semua geometri netral jatuh kedalam dua kelas karakteristik. Ini 2 jenis ilustrasi penting dari sistem matematika dari dalil. (contohnya, pembagian didalam aljabar modern dari semua kelompok aljabar, atau didalam geometri dari terbatasnya rencana-rencana tertuju). Hal ini agak bebeda dari pembagian masalah dari matematika tradisional. Didalam matematika tradisional cenderung membagi kelas atau bagian yang bercabang dan satu kesatuan matematika dimana mempunyai kepemilikan pasti; contohnya semua kurva itu pembagi persamaan kuadrat didalam dua variabel atau semua fungsi itu mempunyai unsur turunan positif.

Kedua, didalam pembuktian dalil II kami mengenalkan sebuah cara yang disebut " Proof analysis ". Cara ini adalah sebuah proses dari penelitian bukti dari teorema untuk menentukan apakah penggunaan bukti yang lengkap untuk hipotesis, jika ini bukan yang kuat atau " memperbaiki ", teorema bisa menjadi pernyataan, yaitu bahwa kesimpulan mengikuti dari hipotesis yang lemah. Bukti hipotesis sering menghasilkan hasil yang tidak menarik, seperti teorema dengan hipotesis yang ganjil. Tapi kadang-kadang itu menghasilkan teorema baru atau pengertian baru didalam situasi. Didalam pengertian diatas, sebuah hasil dari analisis bukti dari teorema 2 sangat besar penurunan didalam hipotesis dari postulat Kesejajaran Lobachevskian untuk property kesejajaran Lobachevckian untuk garis tunggal dan titik tunggal . Teori ini menghasilkan beberapa hasil penting, memasukkan pembagian dari teori geometri kedalam teori geometri Euclidean dan Lobachevskian.