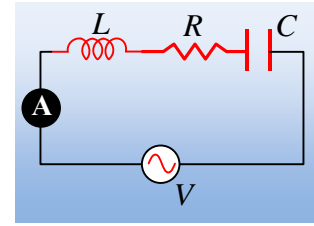


Εναλλασσόμενο ρεύμα και ταλάντωση.

Δίνεται το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L=8\text{mH}$, ο πυκνωτής χωρητικότητα $C=20\mu\text{F}$, η αντίσταση του αντιστάτη $R=30\Omega$, ενώ η τάση του εναλλακτήρα (της πηγής), μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο. Κλείνουμε το διακόπτη και μόλις σταθεροποιηθεί η ένδειξη του αμπερομέτρου, παίρνουμε κάποια στιγμή $t=0$, οπότε η τάση του εναλλακτήρα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση $v=60\sqrt{2} \cdot \eta\mu(5.000t)$ (μονάδες στο S.I.).

Ας μελετήσουμε τι ακριβώς συμβαίνει στο κύκλωμα αυτό.



Εναλλασσόμενο ρεύμα.

Το κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, όπου το αμπερόμετρο μας δείχνει την ενεργό ένταση:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z}$$

Αλλά το ρεύμα διαρρέοντας το κύκλωμα συναντά, μια επαγωγική αντίσταση $Z_L=L\cdot\omega=40\Omega$, μια ωμική αντίσταση $R=30\Omega$ και μια χωρητική αντίσταση $Z_c = \frac{1}{\omega C} = 10\Omega$. Οπότε η συνολική δυσκολία που συναντά το ηλεκτρικό ρεύμα, η εμπέδηση του κυκλώματος, είναι ίση:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{30^2 + (40 - 10)^2} \Omega = 30\sqrt{2}\Omega \rightarrow$$

$$I_o = \frac{V}{Z} = 2\text{A}$$

Σχεδιάζοντας εξάλλου το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων, παίρνουμε το διπλανό σχήμα, όπου για τα πλάτη των τάσεων έχουμε:

$$V_{oL} = I_o Z_L = 80\text{V}, \quad V_{oR} = I_o Z_R = 60\text{V}, \quad V_{oC} = I_o Z_C = 20\text{V}$$

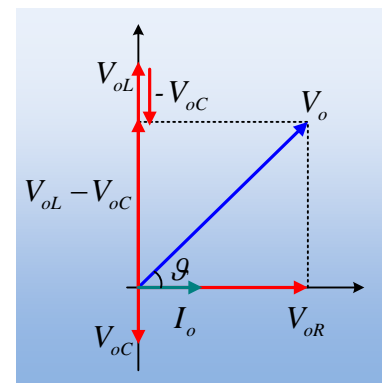
Ενώ το πλάτος της έντασης του ρεύματος έχει την ίδια φάση με το πλάτος της τάσης στον αντιστάτη. Αλλά τότε, με βάση το σχήμα, η ένταση του ρεύματος, καθυστερεί της τάσης κατά τη γωνία θ , όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{V_{oL} - V_{oC}}{V_{oR}} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} = I$$

ή κατά γωνία $\theta=45^\circ$. Οπότε η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, είναι:

$$i = 2 \cdot \eta\mu\left(5.000t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Ας θέσουμε τώρα μερικά ερωτήματα, πάνω στο κύκλωμα αυτό:



- i) Να βρεθεί η στιγμιαία ένταση του ρεύματος, καθώς και οι στιγμιαίες τάσεις στα άκρα κάθε στοιχείου του κυκλώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,9\pi$ ms ;

Τη στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος έχει τιμή:

$$i_1 = 2 \cdot \eta\mu\left(5.000 \cdot 9\pi \cdot 10^{-4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \eta\mu\left(4,5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \eta\mu\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}A$$

Ενώ η τάση στα άκρα του πηνίου, είναι:

$$v_{IL} = V_{oL} \cdot \eta\mu\left(5.000 \cdot 9\pi \cdot 10^{-4} + \frac{\pi}{4}\right) = 80 \cdot \eta\mu\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = 40\sqrt{2}V.$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή:

$$v_{IC} = V_{oC} \cdot \eta\mu\left(5.000 \cdot 9\pi \cdot 10^{-4} - \frac{3\pi}{4}\right) = 20 \cdot \eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -10\sqrt{2}V$$

Η τάση στα άκρα του αντιστάτη: $V_{IR} = i_1 Z_R = 30\sqrt{2}V$.

Ενώ η τάση της πηγής: $v_1 = 60\sqrt{2} \cdot \eta\mu(5.000 \cdot 9\pi \cdot 10^{-4}) = 60\sqrt{2} \cdot \eta\mu(4,5\pi) = 60\sqrt{2}V$

Σημειώσεις:

- α) Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα με τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων που βρήκαμε παραπάνω ($v_1 = v_{IL} + v_{IR} + v_{IC}$).
- β) Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι ο 2^{ος} κανόνα του Kirchhoff, εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας, κάθε στιγμή, στο κύκλωμα. Δεν ισχύει προφανώς με τα πλάτη (ή τις ενεργές τιμές) των τάσεων, που προστίθεται διανυσματικά!
- γ) Πώς βρήκαμε τις στιγμιαίες τάσεις; Τις τάσεις του πυκνωτή και του πηνίου, ξεκινώντας από τις εξισώσεις των στιγμιαίων τάσεων! Αλλά για τον αντιστάτη πήραμε το νόμο του Ohm!!! Προτιμήθηκε άλλη πορεία για να φανεί ότι στον αντιστάτη, όπου τα μεγέθη τάση και ένταση είναι συμφασικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο του Ohm και με στιγμιαίες τιμές, πράγμα που δεν επιτρέπεται να κάνουμε στα άλλα δύο στοιχεία...

- ii) Την παραπάνω χρονική στιγμή t_1 , να βρεθούν οι στιγμιαίες τιμές της ισχύος σε πηνίο, αντιστάτη και πυκνωτή, καθώς και η ισχύς του εναλλακτήρα.

Η στιγμιαία ισχύς του πηνίου (ο ρυθμός με τον οποίο απορροφά ενέργεια το πηνίο ή αν προτιμάται ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η ενέργεια του μαγνητικού του πεδίου), είναι:

$$P_{IL} = v_{IL} i_1 = 40\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}W = 80W$$

Η ισχύς του αντιστάτη (ο ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική πάνω του):

$$P_{IR} = v_{IR} i_1 = 30\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}W = 60W \quad \text{ή} \quad P_{IR} = i_1^2 R = 2 \cdot 30W = 60W$$

Η στιγμιαία ισχύς του πυκνωτή (ο ρυθμός με τον οποίο απορροφά ενέργεια ο πυκνωτή ή αν προτιμάται ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η ενέργεια του ηλεκτρικού του πεδίου):

$$P_{1C} = v_{1C}i_1 = -10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}W = -20W$$

Το παραπάνω **αρνητικό** αποτέλεσμα μας λέει ότι ο πυκνωτής δεν απορροφά ενέργεια, αντιθέτως εκφορτίζεται, προσφέροντας ενέργεια στο κύκλωμα.

Τέλος η ισχύς του εναλλακτήρα (ο ρυθμός με τον οποίο παρέχει η πηγή ενέργεια στο κύκλωμα) είναι:

$$P_1 = v_1i_1 = 60\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}W = 120W$$

Ο εναλλακτήρας (η πηγή) προσφέρει στο κύκλωμα ενέργεια 120J/s και ο πυκνωτής 20J/s. Από αυτά τα 80J/s τα απορροφά το πηνίο και τα υπόλοιπα 60J/s ο αντιστάτης. (διατήρηση της ενέργειας).

Αν εξετάσουμε τις ενέργειες του πηνίου και του πυκνωτή, αξίζει να επισημανθεί ότι ο πυκνωτής εκφορτίζεται παρέχοντας ενέργεια 20J/s, ενώ το πηνίο απορροφά ενέργεια 80J/s!

iii) Την χρονική στιγμή $t_2 = \frac{16,9\pi}{4}ms$, να βρεθούν ξανά οι στιγμιαίες τιμές της ισχύος σε πηνίο, αντιστάτη και πυκνωτή, καθώς και η ισχύς του εναλλακτήρα.

Τη στιγμή t_2 η ένταση του ρεύματος έχει τιμή:

$$i_2 = 2 \cdot \eta\mu\left(5.000 \cdot \frac{16,9}{4} \pi \cdot 10^{-3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \eta\mu\left(21\pi - \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cdot \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \approx 0,77A$$

Ενώ η τάση στα άκρα του πηνίου, είναι:

$$v_{2L} = V_{oL} \cdot \eta\mu\left(5.000 \cdot \frac{16,9}{4} \pi \cdot 10^{-3} + \frac{\pi}{4}\right) = 80 \cdot \eta\mu\left(21\pi + \frac{5\pi}{8}\right) \approx -73,91V.$$

Οπότε η ισχύς του πηνίου είναι:

$$P_{2L} = v_{2L}i_2 = -0,77 \cdot 73,91W = -56,91W$$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή:

$$v_{2C} = V_{oC} \cdot \eta\mu\left(5.000 \cdot \frac{16,9}{4} \pi \cdot 10^{-3} - \frac{3\pi}{4}\right) \approx 18,48V$$

Οπότε για την ισχύ του πυκνωτή:

$$P_{2C} = v_{2C}i_2 = 18,48 \cdot 0,77W = 14,23W$$

Ενώ η ισχύς που μετατρέπεται σε θερμική στον αντιστάτη είναι:

$$P_{2R} = i_2^2 R = 0,77 \cdot 30W \approx 17,79W$$

Τέλος για την ισχύ της πηγής:

$$v_2 = 60\sqrt{2} \cdot \eta\mu\left(5.000 \cdot \frac{16,9}{4} \pi \cdot 10^{-3}\right) \approx -32,47V \text{ και}$$

$$P_2 = v_2i_2 = -32,47 \cdot 0,77W = -25W$$

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι στην περίπτωση αυτή, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου μειώνεται περίπου κατά 57J/s, μετατρέπόμενη σε ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα. Η ενέργεια αυτή εμφανίζεται σε

ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή (14J/s), σε θερμική στον αντιστάτη (18J/s), ενώ τα υπόλοιπα 25J/s, απορροφώνται από την πηγή!

Τη στιγμή αυτή δηλαδή η πηγή παίρνει ενέργεια από το κύκλωμα.

iv) Να βρεθεί σε χρόνο μιας περιόδου, η ενέργεια που απορροφά το πηνίο, ο πυκνωτής και ο αντιστάτης, καθώς και η ενέργεια που προσφέρει στο κύκλωμα η πηγή.

Σε χρόνο μιας περιόδου, ούτε το πηνίο ούτε ο πυκνωτής αλλάζουν τιμή της ενέργειάς τους, συνεπώς δεν απορροφούν, ούτε αποδίδουν ενέργεια. Αυτό συνήθως το εκφράζουμε λέγοντας ότι η μέση ισχύς του πηνίου (πυκνωτή) είναι μηδενική. Πράγματι:

$$\bar{P}_L = V_{L,ε\upsilon} \cdot I_{ε\upsilon} \cdot \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0 = \bar{P}_C$$

Αφού η διαφορά φάσης μεταξύ της έντασης και της αντίστοιχης τάσης είναι 90° .

Στον αντιστάτη παράγεται θερμότητα, σύμφωνα με τον νόμο του Joule:

$$Q = I_{ε\upsilon}^2 RT = \frac{I_o^2}{2} RT = \frac{I_o V_{oR}}{2} T = \frac{I_o V_o \sigma\upsilon\nu\theta}{2} T = V_{ε\upsilon} I_{ε\upsilon} \sigma\upsilon\nu\theta \cdot T$$

Ενώ η ενέργεια που παρέχει η πηγή, με βάση τον ορισμό της μέσης ισχύος, θα είναι:

$$W_\pi = \bar{P} \cdot T = V_{ε\upsilon} I_{ε\upsilon} \sigma\upsilon\nu\theta \cdot T$$

Ίση προφανώς με την ηλεκτρική ενέργεια που εμφανίζεται με τη μορφή της θερμότητας στον αντιστάτη.

Εξαναγκασμένη Ηλεκτρική Ταλάντωση.

Το παραπάνω κύκλωμα προφανώς εκτελεί εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση, όπου ο εναλλακτήρας (η πηγή) είναι ο διεγέρτης, που υποχρεώνει το κύκλωμα να διαρρέεται από Ε.Ρ. με συχνότητα, ίση με τη συχνότητα της πηγής. Έχουμε μετατροπή ενέργειας από ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου σε ενέργεια μαγνητικού, αλλά:

v) Να υπολογιστούν η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου και η ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι:

$$U_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} 8 \cdot 10^{-3} \cdot \left(2 \cdot \eta\mu \left(5.000t - \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = 16 \cdot \eta\mu^2 \left(5.000t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου αντίστοιχα:

$$U_C = \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{1}{2} C \left(V_{oL} \cdot \eta\mu \left(5.000 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^{-6} \cdot 80^2 \cdot \eta\mu^2 \left(5.000 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$U_C = 64 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu^2 \left(5.000 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Το ερώτημα που θα μπορούσε να τεθεί στο σημείο αυτό είναι:

«Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης»;

Αν με τον όρο «ενέργεια ταλάντωσης» εννοούμε το άθροισμα της ενέργειας του πηνίου και της ενέργειας του πυκνωτή, η απάντηση προφανώς θα είναι:

$$U_L + U_C = 16 \cdot \eta\mu^2 \left(5.000t - \frac{\pi}{4} \right) + 64 \cdot 10^{-3} \cdot \eta\mu^2 \left(5.000 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Αλλά το ουσιαστικό ερώτημα είναι, τι νόημα και τι αξία αποδίδουμε στο παραπάνω άθροισμα;

Μήπως παραμένει σταθερή; Μήπως κάπου θα μπορούσαμε να την χρησιμοποιήσουμε;

Η απάντηση νομίζω είναι προφανής. Καμιά αξία...

Η διατήρηση της ενέργειας, είναι αυτή που εκφράζεται στα αποτελέσματα των ερωτήσεων ii) και iii) όπου γίνεται φανερό ότι η πηγή παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα, αλλά ο ρυθμός παροχής ενέργειας, δεν είναι κάθε στιγμή ίση με το ρυθμό που η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική (και τελικά σε θερμότητα) στον αντιστάτη. Ας προσεχθούν τα αποτελέσματα! Ας προσεχθεί ότι μπορεί ο διεγέρτης σε κάποια χρονικά διαστήματα ακόμη και να απορροφά ενέργεια από το κύκλωμα...

dmargaris@gmail.com