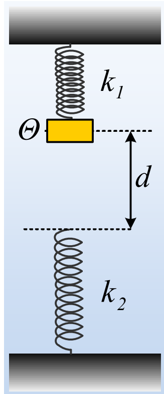
Και μια και δύο ΑΑΤ.



Ένα σώμα μάζας 2kg, είναι δεμένο στο άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_1=200N/m. Ανεβάζουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω φέρνοντάς το σε μια θέση Θ, όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά Δℓ=0,1m. Κάτω ακριβώς από το σώμα υπάρχει ένα δεύτερο ιδανικό ελατήριο, το πάνω άκρο του οποίου απέχει κατά d=0,2m από το σώμα, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή t_o=0, αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί και παρατηρούμε ότι σταματά την προς τα κάτω κίνησή του, αφού μετατοπισθεί κατά 0,3m .

i) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει ΑΑΤ, μέχρι να έρθει σε επαφή με το κάτω ελατήριο, υπολογίζοντας το πλάτος και την περίοδο ταλάντωσης.

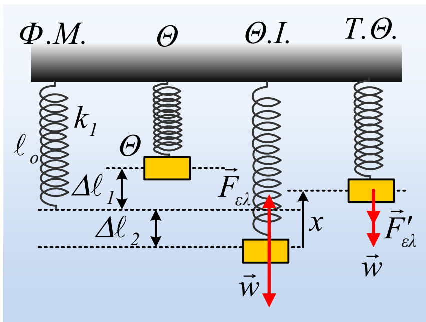
ii) Να αποδείξτε ότι η κίνηση του σώματος, όταν βρίσκεται σε επαφή με το κάτω ελατήριο είναι μια νέα ΑΑΤ, υπολογίζοντας επίσης το πλάτος και την περίοδο ταλάντωσης.

iii) Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα επανέρθει για πρώτη φορά στη θέση Θ;

iv) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής του σώματος στην ανώτερη και στην κατώτερη θέση της τροχιάς του.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται το φυσικό μήκος του ελατηρίου, η θέση Θ, η θέση ισορροπίας και μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά x, από την θέση ισορροπίας. Στη θέση ισορροπίας προφανώς το ελατήριο έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_2$ για αν μπορεί να ασκεί δύναμη με φορά προς τα πάνω, οπότε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}=w \rightarrow k_1 \cdot \Delta\ell_2 = Mg \rightarrow$$

$$\Delta\ell_2 = \frac{Mg}{k_1} = \frac{2\cdot 10}{200} m = 0,1m$$

Αλλά τότε το πλάτος ταλάντωσης, είναι ίσο με $A_1 = \Delta\ell_1 + |\Delta\ell_2| = 0,2m$, αφού το σώμα ξεκίνησε την ταλάντωσή του χωρίς αρχική ταχύτητα. Ας προσέξουμε όμως ότι 0,2m είναι και η απόσταση της θέσεως Θ από το άνω άκρο του κάτω ελατηρίου, πράγμα που σημαίνει ότι τη στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το κάτω ελατήριο βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της πρώτης ταλάντωσης, έχοντας μέγιστη ταχύτητα.

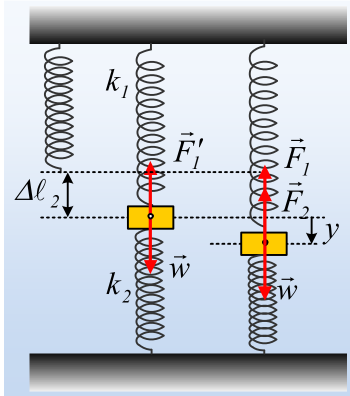
Παίρνοντας τώρα το σώμα στην τυχαία θέση (όπου έχει σχεδιαστεί ώστε $x>\Delta\ell_2$) έχουμε, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση θετική:

$$\Sigma F = -F'_{ελ} - w = -k_1(x-\Delta\ell_2) - Mg = -k_1x + k_1\Delta\ell_2 - Mg = -k_1x$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=k_1$ και με περίοδο:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}s = 0,2\pi\ s.$$

ii) Τη στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το κάτω ελατήριο, βρίσκεται σε ισορροπία, δηλαδή και η νέα ταλάντωση που πρόκειται να ξεκινήσει, έχει την ίδια θέση ισορροπίας με την προηγούμενη.



Έστω τώρα μετά από λίγο, το σώμα απέχει κατά y από την θέση ισορροπίας του. Θα έχουμε (θεωρούμε την προς τα κάτω κατεύθυνση θετική):

$$\Sigma F = w - F_1 - F_2 = Mg - k_1(\Delta\ell_2 + y) - k_2 y \to$$
$$\Sigma F = Mg - k_1\Delta\ell_2 - k_1 y - k_2 y = -(k_1 + k_2)y$$

Συνεπώς το σώμα εκτελεί μια νέα ταλάντωση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$.

Το διάστημα που διανύει το σώμα στη διάρκεια της προς τα κάτω κίνησής του είναι ίσο με την απόσταση d και το πλάτος της νέας ταλάντωσης:

$$s=d+A_2 \to A_2=s-d=0,3m-0,2m=0,1m.$$

Η ταλάντωση ξεκινά από την θέση ισορροπίας, συνεπώς η ενέργεια του σώματος είναι κινητική και ίση με την ενέργεια της πρώτης ταλάντωσης $K_{max}=\frac{1}{2}k_1A_1^2$, αλλά αφού η ενέργεια στη διάρκεια της δεύτερης ταλάντωσης παραμένει σταθερή:

$$K_{max} = U_{max} \to \frac{1}{2}k_1A_1^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)A_2^2 \to$$

$$k_1 + k_2 = k_1\frac{A_1^2}{A_2^2}A_2 \to k_2 = k_1\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) \text{ ή}$$

$$k_2 = k_1\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) = 200\left(\frac{0,2^2}{0,1^2} - 1\right)N/m = 600N/m$$

Οπότε η περίοδος της δεύτερης ταλάντωσης θα είναι:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1+k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{800}}s = 0,1\pi \text{ s.}$$

iii) Το χρονικό διάστημα, που θα χρειαστεί το σώμα, από την αρχική θέση μέχρι να έρθει σε επαφή με το κάτω ελατήριο (θέση ισορροπίας) είναι ίσο με $\frac{T_1}{4}$, από τη θέση ισορροπίας μέχρι την κάτω ακραία θέση $\frac{T_2}{4}$, όπως επίσης και κατά την επιστροφή στη θέση ισορροπίας $\frac{T_2}{4}$ και στη συνέχεια σε $\frac{T_1}{4}$ θα φτάσει στη θέση Θ, αφού το κάτω ελατήριο θα παραμείνει στο φυσικό του μήκος, μόλις το σώμα κινηθεί προς τα πάνω κατά A_2.

Αλλά τότε ο συνολικός χρόνος μέχρι να επιστρέψει στη θέση Θ (η περίοδος της συνολικής, μη αρμονικής ταλάντωσης) θα είναι:

$$T = 2\frac{T_1}{4} + 2\frac{T_2}{4} = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{0,2\pi + 0,1\pi}{2} s = 0,15\pi \text{ s.}$$

iv) Για την θέση Θ:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = w + F_{1\varepsilon\lambda} = Mg + k_1\Delta\ell_1 = 20N + 200 \cdot 0,1N = 40N = 40kgm/s^2.$$

Με φορά προς τα κάτω.

Στην κατώτερη θέση:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = F_{1\varepsilon\lambda} + F_{2\varepsilon\lambda} - w = k_1(\Delta\ell_2 + A_2) + k_2 A - Mg \rightarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = k_1(\Delta\ell_2 + A_2) + k_2 A - Mg = 200(0,1 + 0,1)N + 600 \cdot 0,1N - 20N = 80N = 80kgm/s^2.$$

Με φορά προς τα πάνω.

Εναλλακτικά, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε:

Στην πάνω θέση Θ:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = -D_1 A_1 == -200 \cdot 0,2N = -40kgm/s^2.$$

Στην χαμηλότερη θέση:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow$$

$$\frac{dP}{dt} = -D_2 y = -800 \cdot (-0,1)N = +80kgm/s^2.$$

dmargaris@gmail.com