Sobre la propagacion de ondas EM en cristales no lineales

Christian Schmiegelow,
Sobre un trabajo de Alberto Lencina

August 27, 2003

§ *1 Introducción*

En muchas aplicaciones de la física es muy útil y, a veces, necesario utilizar tensores para describir cantidades físicas. En tales casos resulta coherente utilizar una notación tensorial que sea consistente y clara. Muchas veces se mezcla notación tensorial con vectorial y esto trae confusiones.
A continuación se presenta un cálculo hecho por Alberto Lencina, el cual adapté para que se pueda leer todo en notación tensorial.

Existen cristales cuyos índices de refracción cambian cuando se les aplica un campo eléctrico externo. Estos cambios pueden no depender linealmente del campo aplicado y, en general, dichos cristales no presentan isotropía. El estudio de estos cristales ha tomado bastante importancia en los últimos años debido a su practicidad para el diseño de dispositivos opto-electŕonicos como moduladores, retardadores y otros.
Se estudiará, principalmente, cómo varía la amplitud de una onda linealmente polarizada que incide sobre un cristal al que se le esta aplicando un campo externo.

§ *2 Notación y consideraciones sobre tensores*

Es importante notar que, en este estudio, el espacio es el euclídeo y el tiempo es no relativista. Es decir todo el análisis se hará para límites no relativistas.
Utilizaremos la convención de Einstein para la suma de índices. Un vector cualquiera será representado por un tensor de la siguiente manera.

$$\mathbf{E} \equiv E_\alpha \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1}$$

También anotaremos las derivadas de un tensor de cualquier rango con una coma. La siguiente ecuación muestra un ejemplo para un tensor de rango tres:

$$\frac{\partial E_{\alpha\gamma\delta}}{\partial x_\beta} \equiv E_{\alpha\gamma\delta,\beta} \tag{2}$$

Anotamos a continuación cómo quedan en esta notación la divergencia, el gradiente de la divergencia, el laplaciano y el rotor de un campo vectorial E_α.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} &\equiv E_{\beta,\beta} \\
\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}\right) &\equiv E_{\beta,\beta,\alpha} \\
\overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{E} &\equiv E_{\alpha,\beta,\beta} \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} &\equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{\gamma,\beta}
\end{aligned} \tag{3}$$

Donde $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ y $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el pseudotensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Las relaciones anteriores pueden ser fácilmente verificadas simplemente realizando las sumas correspondientes.

Para resolver las ecuaciones de Maxwell necesitaremos hacer el rotor del rotor. Desarrollaremos ahora como queda esa operación. Para hacer esto usaremos dos igualdades que son fáciles de verificar:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\eta\mu}\varepsilon_{\mu\beta\gamma} &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{\eta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\eta\beta} \\
E_{\beta,\beta,\alpha} &= E_{\beta,\alpha,\beta}
\end{aligned} \tag{4}$$

Efectuamos ahora el rotor del rotor; nótese que los índices se arreglan de manera consistente con la ecuación 4.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E}\right) &\equiv \varepsilon_{\alpha\eta\mu}\varepsilon_{\mu\beta\gamma} E_{\gamma,\beta,\eta} = \\
\delta_{\alpha\beta}\delta_{\eta\gamma} E_{\gamma,\beta,\eta} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\eta\beta} E_{\gamma,\beta,\eta} &= E_{\gamma,\alpha,\gamma} - E_{\alpha,\eta,\eta} = \\
E_{\gamma,\gamma,\alpha} - E_{\alpha,\eta,\eta} &\equiv \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}\right) - \overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{E}
\end{aligned} \tag{5}$$

Recobramos, como era de esperar, el resultado del cálculo vectorial para el rotor del rotor.[1]

§ 3 *Ecuaciones de Maxwell en un dieléctrico*

Cuando un campo eléctrico o una onda EM atraviesa un dieléctrico (en particular, los cristales a estudiar) se desplazan cargas. Al desplazarse cargas se genera una corriente j_α dada por la cantidad N de carga q que se mueve con una velocidad v_α de manera tal que.

$$\begin{aligned}
j_\alpha = qNv_\alpha &= qN\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} \\
j_\alpha &= \frac{\partial P_\alpha}{\partial t}
\end{aligned} \tag{6}$$

[1] Es muy fácil demostrar casi todas la identidades vectoriales usando solo las ecuaciones 3 y 4.

La ley de Gauss para la polarización en notación tensorial se escribe $P_{\alpha,\alpha} = -\rho$. Podemos entonces escribir las ecuaciones de Maxwell de la siguiente manera.

$$E_{\alpha,\alpha} = \frac{\rho_{pol}}{\epsilon_o} = -\frac{P_{\alpha,\alpha}}{\epsilon_o} \tag{7}$$

$$B_{\alpha,\alpha} = 0 \tag{8}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{\gamma,\beta} = -\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} \tag{9}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{\gamma,\beta} = \mu_o j_\alpha + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial E_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_o P_\alpha + \mu_o \epsilon_o E) \tag{10}$$

Se supone que la permitividad del dieléctrico es la del vacío Al tomar rotor a ambos lados de la anteúltima ecuación se tiene, usando el resultado sobre el rotor, que:

$$E_{\beta,\beta,\alpha} - E_{\alpha,\beta,\beta} = -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{\gamma,\beta}$$

reemplazando en la ecuación 10 se tiene que

$$E_{\beta,\beta,\alpha} - E_{\alpha,\beta,\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mu_o P_\alpha + \mu_o \epsilon_o E)$$

que escribiremos más prolijamente de la siguiente manera

$$E_{\beta,\beta,\alpha} - E_{\alpha,\beta,\beta} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial t^2} = -\mu_o \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial t^2} \tag{11}$$

§ *4 Soluciones para cristales no lineales*

La polarización, en general, será la suma de una contribución que dependa linealmente del campo y una que no lo haga, podemos escribir

$$P_\alpha = P_\alpha^L + P_\alpha^{NL} \tag{12}$$

donde P_α^L y P_α^{NL} están definidas de la siguiente manera

$$P_\alpha^L = \epsilon_o \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta \tag{13}$$

$$P_\alpha^{NL} = \epsilon_o \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_\beta E_\gamma + \epsilon_o \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} E_\beta E_\gamma E_\delta \ldots \tag{14}$$

Nos limitaremos a estudiar qué pasa con polarizaciones de hasta tercer orden. Es importante notar que tanto $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}$ como $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}$ pueden ser elegidos de manera tal que sean simétricos con respecto los índices β, γ, δ ya que cada uno de los $\chi_\alpha^{(2)}$ representan una forma cuadática. Asimismo, cada uno de los $\chi_\alpha^{(3)}$ son la extension natural de la forma cuadrática a una dimensión más (ie: forma cúbica).
Para simplificar un poco las cosas podemos 'acoplar' la polarización lineal con el campo eléctrico definiendo el tensor $\epsilon_{\alpha\beta}$ de la siguiente manera.

$$\epsilon_o E_\alpha + P_\alpha^L = \epsilon_o E_\alpha + \epsilon_o \chi_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta = \epsilon_o(\delta_{\alpha\beta} + \chi_{\alpha\beta}^{(1)}) E_\beta = \epsilon_o \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta \tag{15}$$

El estudio que nos interesa hacer es sólo de las componentes perpendiculares de las ondas planas, en direccíon de propagación r se tiene que

$$E_{\beta,\beta} = 0$$

Con estas ultimas consideraciones podemos reescribir la ecuación 11 como:

$$-E_{\alpha,\beta,\beta} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta} E_\alpha}{\partial t^2} = -\mu_o \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial t^2} \tag{16}$$

Como se mencionó en la introducción se estudiarará el caso en el que hay un campo eléctrico fijo E_{o_α} aplicado y una onda que incide linealmente polarizada. La solución para la ecuación de onda debe tener, entonces, la siguiente forma.

$$E_\alpha = E_\alpha(r_\nu, t) = E_{o_\alpha} + \frac{1}{2}[E_\alpha(r_\nu)e^{-iwt} + c.c.] \tag{17}$$

donde $E_\alpha(r_\nu)$ puede ser separada en dos componentes perpendiculares. Esto se escribe así:

$$E_\alpha(r_\nu) = E_{1_\alpha}(r_\nu)e^{ik_{1_\gamma} r_\gamma} + E_{2_\alpha}(r_\nu)e^{ik_{2_\gamma} r_\gamma} \tag{18}$$

$$E_{1_\alpha}(r_\nu)E_{2_\alpha}(r_\nu) = 0 \tag{19}$$

Si ponemos todo junto, omitiendo la dependencia de E_{i_α} en r_ν simplemente para que se vea mas prolijo, se tiene

$$E_\alpha = E_{o_\alpha} + \frac{1}{2}[E_{1_\alpha} e^{i(k_{1_\gamma} r_\gamma - wt)} + E_{2_\alpha} e^{i(k_{2_\gamma} r_\gamma - wt)} + c.c.] \tag{20}$$

Para poder resolver la ecuación de onda se necesitará hacer los productos $E_\alpha E_\beta$ y $E_\alpha E_\beta E_\gamma$. Para simplificar un poco las cosas definimos

$$\wp_\alpha = \frac{1}{2}[E_{1_\alpha}(r)e^{i(k_1 r - wt)} + E_{2_\alpha}(r)e^{i(k_2 r - wt)} + c.c.] \tag{21}$$

entonces al desarollar el producto $E_\alpha E_\beta$ se tiene

$$E_\alpha E_\beta = E_{o_\alpha} E_{o_\beta} + E_{o_\alpha}\wp_\beta + E_{o_\beta}\wp_\alpha + \wp_\alpha \wp_\beta \tag{22}$$

El término $E_{o_\alpha} E_{o_\beta}$ no nos interesa en la solución, porque estamos interesados en ver cómo se modula la onda que se manda y no el campo fijo aplicado. El término $\wp_\alpha \wp_\beta$ tampoco nos interesa, ya que en éste aparecen las frecuencias sumadas, lo que significa que aparecen armónicos, que tampoco nos interesa estudiar. Por estas, razones despreciamos estos términos en la solución y rescribimos (22) como:

$$E_\alpha E_\beta = E_{o_\alpha}\wp_\beta + E_{o_\beta}\wp_\alpha \tag{23}$$

$$\begin{aligned} E_\alpha E_\beta = {} & \frac{E_{o_\alpha}}{2}[E_{1_\beta}(r)e^{i(k_1 r - wt)} + E_{2_\beta}(r)e^{i(k_2 r - wt)} + c.c.] + \\ & \frac{E_{o_\beta}}{2}[E_{1_\alpha}(r)e^{i(k_1 r - wt)} + E_{2_\alpha}(r)e^{i(k_2 r - wt)} + c.c.] \end{aligned}$$

Desarollamos ahora el producto $E_\alpha(r,t)E_\beta(r,t)E_\gamma(r,t)$ y se tiene

$$\begin{aligned} E_\alpha E_\beta E_\gamma = \\ E_{o_\alpha}E_{o_\beta}E_{o_\gamma} + \wp_\alpha E_{o_\beta}E_{o_\gamma} + E_{o_\alpha}\wp_\beta E_{o_\gamma} + E_{o_\alpha}E_{o_\beta}\wp_\gamma + \\ E_{o_\alpha}\wp_\beta\wp_\gamma + \wp_\alpha E_{o_\beta}\wp_\gamma + \wp_\alpha\wp_\beta E_{o_\gamma} + \wp_\alpha\wp_\beta\wp_\gamma \end{aligned} \tag{24}$$

Nuevamente, como, no nos interesan los términos constantes o donde aparece $\wp$ dos veces, pero sí donde aparece tres veces, ya que en este aparecen términos que no son armónicos, nos quedamos con

$$E_\alpha E_\beta E_\gamma = \wp_\alpha E_{o_\beta}E_{o_\gamma} + E_{o_\alpha}\wp_\beta E_{o_\gamma} + E_{o_\alpha}E_{o_\beta}\wp_\gamma + \wp_\alpha\wp_\beta\wp_\gamma \tag{25}$$

Los primeros términos tienen una forma simple, pero el último no. Lo desarrollamos de la misma manera que hicimos antes. Primero hacemos los siguientes reemplazos:

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{2}[E_{1_\alpha}(r)e^{i(k_1r-wt)} + E_{2_\alpha}(r)e^{i(k_2r-wt)}] \tag{26}$$

$$\Gamma_\alpha^* = \frac{1}{2}[E_{1_\alpha}^*(r)e^{-i(k_1r-wt)} + E_{2_\alpha}^*(r)e^{-i(k_2r-wt)}] \tag{27}$$

$$\wp_\alpha = \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha^* \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \wp_\alpha\wp_\beta\wp_\gamma = \Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha^*\Gamma_\beta^*\Gamma_\gamma^* + \\ \Gamma_\alpha^*\Gamma_\beta\Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta^*\Gamma_\gamma^* + \\ \Gamma_\alpha\Gamma_\beta^*\Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha^*\Gamma_\beta\Gamma_\gamma^* + \\ \Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\gamma^* + \Gamma_\alpha^*\Gamma_\beta^*\Gamma_\gamma \end{aligned} \tag{29}$$

cada par de términos de cada linea corresponde a un par de conjugados los primeros dos no nos interesan, porque representan la generación de armónicos, asi que escribimos

$$\wp_\alpha\wp_\beta\wp_\gamma = \Gamma_\alpha^*\Gamma_\beta\Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta^*\Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\gamma^* + c.c. \tag{30}$$

Rescribimos, entonces, la ecuación 24 como

$$\begin{aligned} E_\alpha(r,t)E_\beta(r,t)E_\gamma(r,t) = \wp_\alpha E_{o_\beta}E_{o_\gamma} + E_{o_\alpha}\wp_\beta E_{o_\gamma} + E_{o_\alpha}E_{o_\beta}\wp_\gamma + \\ (\Gamma_\alpha^*\Gamma_\beta\Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta^*\Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha\Gamma_\beta\Gamma_\gamma^* + c.c.) \end{aligned} \tag{31}$$

Con estas herramientas podemos escribir mas explícitamente las contribuciones cuadráticas y cúbicas de la polarización.
Como hemos remarcado anteriormente.[2] que

$$\chi_{\alpha\beta\gamma} = \chi_{\alpha\gamma\beta} \tag{32}$$

[2]la explicación propuesta es muy matemática y rigurosa, sin embargo una explicación de esto con argumentos físicos y no matemáticos se puede encontrar en el capítulo 3 de Nonlinear Optics, D.L .Mills, Springer 1998

Revisemos qué pasa, ahora, con las polarizaciones de segundo grado recordando el resultado (23).

$$P_\alpha^{(2)} = \epsilon_o \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma = \epsilon_o \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} [\frac{E_{o_\gamma}}{2}(\Gamma_\beta + \Gamma^*_\beta) + \frac{E_{o_\beta}}{2}(\Gamma_\gamma + \Gamma^*_\gamma)] =$$
$$\epsilon_o \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} E_{o_\gamma}(\Gamma_\beta + \Gamma^*_\beta)$$
$$P_\alpha^{(2)} = \epsilon_o \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} E_{o_\beta}[E_{1_\gamma} e^{i(k_{1_\delta} r_\delta - wt)} + E_{2_\gamma} e^{i(k_{2\delta} r_\delta - wt)} + c.c.] \tag{33}$$

Para el caso de la polarización de grado 3 se tiene, como ya dijimos, que

$$\chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \chi^{(3)}_{\alpha\beta\delta\gamma}; \qquad \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \chi^{(3)}_{\alpha\gamma\beta\delta}; \qquad \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \chi^{(3)}_{\alpha\delta\gamma\beta} \tag{34}$$

de lo que sale que

$$P_\alpha^{(3)} = \epsilon_o \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}[3E_{o_\beta} E_{o_\gamma}[\Gamma_\delta + c.c.] + 3(\Gamma^*_\beta \Gamma_\gamma \Gamma_\delta) + c.c.] \tag{35}$$

Expandiendo el último término y renombrando $\chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{3}{2}\chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se tiene entonces, procediendo como se hizo antes, que:

$$P_\alpha^{(3)} = \epsilon_o \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}[\frac{1}{2} E_{o_\beta} E_{o_\gamma}(E_{1_\delta} e^{i(k_1 r - wt)} + E_{2_\delta} e^{i(k_2 r - wt)} + c.c.) + \tag{36}$$
$$\frac{1}{4}\Bigg(E^*_{1_\beta} E_{1_\gamma} E_{1_\delta}(r) e^{i(k_1 r - wt)} + E^*_{2_\beta} E_{2_\gamma} E_{2_\delta} e^{i(k_2 r - wt)} +$$
$$2E^*_{1_\beta} E_{1_\gamma} E_{2_\delta} e^{i(k_2 r - wt)} + 2E^*_{2_\beta} E_{2_\gamma} E_{1_\delta} e^{i(k_1 r - wt)} +$$
$$E^*_{1_\beta} E_{2_\gamma} E_{2_\delta} e^{i([2k_2 - k_1] r - wt)} + E^*_{2_\beta} E_{1_\gamma} E_{1_\delta} e^{i([2k_1 - k_2] r - wt)} + c.c.\Bigg)]$$

Lo que se desarrolló hasta ahora es la forma que debe tener la solución buscada, es decir, propusimos una forma para la solución y estamos desarrollándola. Debemos, ahora, remplazar todos estos resultados en la ecuacion diferencial (12) para encontrar la forma exacta de $E(r)$.Para hacer esto empezaremos desarrollando las derivadas.

$$E_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\Bigg[ik_{1_\beta} E_{1_\alpha} e^{i(k_{1_\beta} r_\beta - wt)} + E_{1_{\alpha,\beta}} e^{i(k_{1_\beta} r_\beta - wt)} + \tag{37}$$
$$ik_{2_\beta} E_{2_\alpha} e^{i(k_{2_\beta} r_\beta - wt)} + E_{2_{\alpha,\beta}} e^{i(k_{2_\beta} r_\beta - wt)} + c.c.\Bigg]$$

El laplaciano, después de reagrupar términos queda como

$$E_{\alpha,\beta,\beta} = \frac{1}{2}\Bigg[\Bigg(E_{1_{\alpha,\beta,\beta}} + 2ik_{1_\beta} E_{1_{\alpha,\beta}} - E_{1_\alpha} k_{1_\beta} k_{1_\beta}\Bigg) e^{i(k_{1_\beta} r_\beta - wt)} + \tag{38}$$
$$\Bigg(E_{2_{\alpha,\beta,\beta}} + 2ik_{2_\beta} E_{1_{\alpha,\beta}} - E_{2_\alpha} k_{2_\beta} k_{2_\beta}\Bigg) e^{i(k_{2_\beta} r_\beta - wt)} + c.c.\Bigg]$$

hacemos una aproximación conocida como SVEA 'slow varying envelope approximation'. Esta aproximación nos permite despreciar el término $E_{1_{\alpha,\beta,\beta}}$ entonces la ecuación anterior queda como

$$E_{\alpha,\beta,\beta} = \frac{1}{2}\Bigg[\Big(2ik_{1_\beta}E_{1_{\alpha,\beta}} - E_{1_\alpha}k_{1_\beta}k_{1_\beta}\Big)e^{i(k_{1_\beta}r_\beta - wt)} + \Big(2ik_{2_\beta}E_{1_{\alpha,\beta}} - E_{2_\alpha}k_{2_\beta}k_{2_\beta}\Big)e^{i(k_{2_\beta}r_\beta - wt)} + c.c.\Bigg] \tag{39}$$

Las derivadas con respecto al tiempo quedan de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 P_\alpha^{NL}}{\partial t^2} = -w^2 P_\alpha^{NL} \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}E_\alpha}{\partial t^2} = -w^2\epsilon_{\alpha\beta}E_\alpha \tag{41}$$

Ahora rearmamos la ecuación diferencial reemplazando por lo que ya conocemos

$$\frac{1}{2}[(2ik_{1_\beta}E_{1_{\alpha,\beta}} - E_{1_\alpha}k_{1_\beta}k_{1_\beta})e^{i(k_{1_\beta}r_\beta - wt)} + (2ik_{2_\beta}E_{2_{\alpha.\beta}} - E_{2_\alpha}(r)k_{2_\beta}k_{2_\beta})e^{i(k_{2_\beta}r_\beta - wt)} + \frac{w^2\epsilon_{\alpha\beta}E_\beta}{c^2} = -\mu_0 w^2 P_\alpha^{NL} \tag{42}$$

Usando que $k_i = n_i k_o = n_i \frac{w}{c}$ y $n_i^2 = \epsilon_i$ se reordena la ecuación anterior para dar:

$$ik_{1_\beta}E_{1_{\alpha,\beta}}e^{ik_{1_\beta}r_\beta + ik_{2_\beta}}E_{2_{\alpha,\beta}}e^{ik_{2_\beta}r_\beta} = -w^2\mu_o P_\alpha^{NL}e^{iwt} \tag{43}$$

Como E_1 y E_2 fueron definidos perpendiculares definimos, ahora, a_α y b_α de la siguiente manera

$$a_\alpha = \frac{E_{1_\alpha}}{\sqrt{E_{1_\beta}E_{1_\beta}}} \tag{44}$$

$$b_\alpha = \frac{E_{2_\alpha}}{\sqrt{E_{2_\beta}E_{2_\beta}}} \tag{45}$$

$$c_\alpha = \frac{E_{o_\alpha}}{\sqrt{E_{o_\beta}E_{o_\beta}}} \tag{46}$$

$$a_\alpha b_\alpha = 0 \tag{47}$$

$$E_1 = \sqrt{E_{1_\beta}E_{1_\beta}} \tag{48}$$

$$E_2 = \sqrt{E_{2_\beta}E_{2_\beta}} \tag{49}$$

$$E_0 = \sqrt{E_{0_\beta}E_{0_\beta}} \tag{50}$$

de lo que al multiplicar (43) escalarmente a ambos lados por a_α y por b_α se obtiene

$$E_{1,\beta} = \frac{w^2 \mu_o i a_\alpha}{k_1} P_\alpha^{NL} e^{i(wt-k_1 r)} \tag{51}$$

$$E_{2,\beta} = \frac{w^2 \mu_o i b_\alpha}{k_2} P_\alpha^{NL} e^{i(wt-k_2 r)} \tag{52}$$

Reemplazaremos ahora las soluciones para la polarización obtenidas anteriormente en estas ecuaciones. Primero lo haremos para la polarización de segundo grado.

$$\frac{w^2 \mu_o i a_\alpha}{k_1} P_\alpha^{(2)} e^{i(wt-k_1 r)} = i\frac{k_o}{n_1}[a_\alpha \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} c_\beta a_\gamma E_o E_1 + a_\alpha \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma} c_\beta b_\gamma E_o E_2 e^{i\Delta k r}] \tag{53}$$

donde $\Delta k = k_2 - k_1$. Si ahora se usa la siguiente fórmula, que se vera de dónde sale:

$$\chi_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\alpha}\epsilon_{\beta\beta}) r_{\alpha\beta\gamma} \tag{54}$$

y se realizan las siguientes sustituciones [3]

$$r_{1eff} = a_\alpha r_{\alpha\beta\gamma} b_\beta c_\gamma (\epsilon_{\alpha\alpha}\epsilon_{\beta\beta}) = b_\alpha r_{\alpha\beta\gamma} a_\beta c_\gamma (\epsilon_{\alpha\alpha}\epsilon_{\beta\beta}) \tag{55}$$

$$r_{2eff} = a_\alpha r_{\alpha\beta\gamma} a_\beta c_\gamma (\epsilon_{\alpha\alpha}\epsilon_{\beta\beta}) \tag{56}$$

$$r_{3eff} = b_\alpha r_{\alpha\beta\gamma} b_\beta c_\gamma (\epsilon_{\alpha\alpha}\epsilon_{\beta\beta}) \tag{57}$$

y

$$d_1 = \frac{k_0}{2n_1} r_{1eff} E_o \tag{58}$$

$$d_2 = \frac{k_0}{2n_1} r_{2eff} E_o \tag{59}$$

$$d_3 = \frac{k_0}{2n_2} r_{1eff} E_o \tag{60}$$

$$d_4 = \frac{k_0}{2n_2} r_{3eff} E_o \tag{61}$$

$$\tag{62}$$

se tiene que:

$$\frac{iw^2}{k_1 c^2 \epsilon_o} a_\alpha P_\alpha^{(2)} e^{i(wt-k_1 r)} = -i d_1 E_2(r) e^{i\Delta k r} - i d_2 E_1(r) \tag{63}$$

$$\frac{iw^2}{k_2 c^2 \epsilon_o} b_\alpha P_\alpha^{(2)} e^{i(wt-k_2 r)} = -i d_3 E_1(r) e^{i\Delta k r} - i d_4 E_2(r) \tag{64}$$

[3]La igualdad de la ecuación 54 se da si $\chi^{(2)}$ es real; lo que implica que el medio no tiene pérdidas , para más información, ver Nonlinear Optics, D.L .Mills, Springer 1998

Este es el resultado de She y Lee.[4] Sin embargo, nuestra cuenta no termina acá. Falta la polarización de tercer orden. Procediendo análogamente, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{iw}{k_1 c^2 \epsilon_o} a_\alpha P_\alpha^{(3)} e^{i(wt-k_1 r)} = i[&f_1 E_1(r) + f_2 E_2(r) e^{i\Delta kr} + f_3 |E_1(r)|^2 E_1(r) + \\ &f_4 |E_1(r)|^2 E_2(r) e^{i\Delta kr} + \frac{f_4}{2} E_1(r) E_2^*(r) E_1 e^{-i\Delta kr} + \\ &f_5 |E_2(r)|^2 E_1(r) + \frac{f_5}{2} E_2(r) E_1^*(r) E_2(r) e^{i2\Delta kr} + \\ &f_6 |E_2(r)|^2 E_2(r) e^{i\Delta kr}]\end{aligned} \tag{65}$$

y donde se definió

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{k_0}{n_1} a_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\beta c_\gamma a_\delta E_o^2 \\ f_2 &= \frac{k_0}{n_1} a_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\beta c_\gamma b_\delta E_o^2 \\ f_3 &= \frac{k_0}{4n_1} a_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\beta a_\gamma a_\delta \\ f_4 &= \frac{k_0}{2n_1} a_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\beta a_\gamma b_\delta \\ f_5 &= \frac{k_0}{2n_1} a_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} b_\beta b_\gamma a_\delta \\ f_6 &= \frac{k_0}{4n_1} a_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} b_\beta b_\gamma b_\delta \end{aligned} \tag{66}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{iw}{k_2 c^2 \epsilon_o} b_\alpha P_\beta^{(3)} e^{i(wt-k_1 r)} = i[&g_1 E_1(r) e^{-i\Delta kr} + g_2 E_2(r) + g_3 |E_1(r)|^2 E_1(r) e^{-i\Delta kr} + \\ &g_4 |E_1(r)|^2 E_2(r) + \frac{f_4}{2} E_1(r) E_2^*(r) E_1 e^{-i2\Delta kr} + \\ &g_5 |E_2(r)|^2 E_1(r) e^{-i\Delta kr} + \frac{g_5}{2} E_2(r) E_1^*(r) E_2(r) e^{i\Delta kr} + \\ &g_6 |E_2(r)|^2 E_2(r)]\end{aligned} \tag{67}$$

donde

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{k_0}{n_2} b_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\beta c_\gamma a_\delta E_o^2 \\ g_2 &= \frac{k_0}{n_2} b_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\beta c_\gamma b_\delta E_o^2 \\ g_3 &= \frac{k_0}{4n_2} b_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\beta a_\gamma a_\delta \end{aligned} \tag{68}$$

[4] Wave coupling theory of linear electooptic effect, Optics communication 195 (2001) 303-311

$$g_4 = \frac{k_0}{2n_2} b_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\beta a_\gamma b_\delta$$
$$g_5 = \frac{k_0}{2n_2} b_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} b_\beta b_\gamma a_\delta$$
$$g_6 = \frac{k_0}{4n_2} b_\alpha \chi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} b_\beta b_\gamma b_\delta$$

Sumamos ahora las contribuciones de segundo y tercer orden para cada una de las componentes del campo eléctrico y tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_1(r)}{\partial r} &= \\ -i\big[d_1 e^{i\Delta kr} - f_2 e^{i\Delta kr} - f_4|E_1(r)|^2 e^{i\Delta kr} &- \\ \frac{f_5}{2} E_2(r)E_1^*(r)e^{i2\Delta kr} - f_6|E_2(r)|^2 e^{i\Delta kr}\big] E_2(r) &- \\ i\big[d_2 - f_1 - f_3|E_1(r)|^2 - \frac{f_4}{2} E_1(r)E_2^*(r)e^{-i\Delta kr} - f_5|E_2(r)|^2\big] E_1(r) & \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_2(r)}{\partial r} &= \\ -i\big[d_3 e^{-i\Delta kr} - g_1 e^{-i\Delta kr} - g_3|E_1(r)|^2 e^{-i\Delta kr} & \\ -\frac{g_4}{2} E_1(r)E_2^*(r)e^{-i2\Delta kr} - g_5|E_2(r)|e^{-i\Delta kr}\big] E_1(r) & \\ -i\big[d_4 - g_2 - g_4|E_1(r)|^2 - \frac{g_5}{2} E_2(r)E_1^*(r)e^{i\Delta kr} - g_6|E_2|^2\big] E_2(r) & \end{aligned} \tag{70}$$

Hacemos ahora unas aproximaciones que llamaremos slow coupling approximation en las cuales se supone que

$$E_1(r) \cong cte = E_1(0) = E_{1_0} \tag{71}$$
$$E_2(r) \cong cte = E_2(0) = 0 \tag{72}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_1(r)}{\partial r} &= -i\big[d_1 - f_2 - f_4|E_1(r)|^2\big] E_2(r)e^{i\Delta kr} \\ &\quad -i\big[d_2 - f_1 - f_3|E_1(r)|^2\big] E_1(r) \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_2(r)}{\partial r} &= -i\big[d_3 - g_1 - g_3|E_1(r)|^2\big] E_1(r)e^{-i\Delta kr} \\ &\quad -i\big[d_4 - g_2 - g_4|E_1(r)|^2\big] E_2(r) \end{aligned} \tag{74}$$

ahora, llamando

$$h_1 = d_1 - f_2 - f_4|E_{1_0}|^2 \tag{75}$$
$$h_2 = d_2 - f_1 - f_3|E_{1_0}|^2 \tag{76}$$
$$h_3 = d_3 - g_1 - g_3|E_{1_0}|^2 \tag{77}$$
$$h_4 = d_4 - g_2 - g_4|E_{1_0}|^2 \tag{78}$$
$$\tag{79}$$

se obtiene

$$\frac{\partial E_1}{\partial r} = -ih_1 E_2(r) e^{i\Delta k r} - ih_2 E_1(r) \tag{80}$$
$$\frac{\partial E_2}{\partial r} = -ih_3 E_1(r) e^{i\Delta k r} - ih_4 E_2(r) \tag{81}$$

Esta es la misma ecuación diferencial a la que llegan She y Lee, Opt. Communications 195, 303-311 (2001) y cuya solución es: [5]

$$E_1(r) = \rho_1(r) e^{i(\beta r + \phi_1(r))} \tag{82}$$
$$E_2(r) = \rho_2(r) e^{i(\beta r + \phi_2(r))} \tag{83}$$

donde

$$\rho_1(r) = \sqrt{E_1^2(o)\cos^2(\mu r) + (\frac{\gamma}{\mu})^2 E_1^2(0)\sin^2(\mu r)} \tag{84}$$
$$\phi_1(r) = arctan\big(\frac{\gamma}{\mu}\tan(\mu r)\big) \tag{85}$$
$$\rho_2(r) = |\frac{h_3}{\mu} E_1(0)\sin(\mu r)| \tag{86}$$
$$\phi_2(r) = -\frac{\pi}{2}\frac{h_3}{|h_3|} \tag{87}$$

donde

$$\beta = \frac{\Delta k - h_2 - h_4}{2} \tag{88}$$
$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta k + h_2 - h_4)^2 + 4h_1 h_3} \tag{89}$$
$$\gamma = \frac{h_4 - h_2 - \Delta k}{2} \tag{90}$$

Es importante notar que, aunque la ecuación diferencial tenga la misma forma que la de She y Lee, los coeficientes son distintos y, por ende, la solución real no es la misma.

§ *5 Bibliografia*

⊙ Nonlinear Optics, D.L .Mills, Springer 1998
⊙Quantum Electronics, A. Yarvi, tercera edición, Wiley, New York, 1988
⊙Wave coupling theory of linear electooptic efect, W.l. She y W.K. Lee, Optics Communications 195 (2001) 303-311

[5]Se andjunta a continuación el trabajo de W.L. She y W.K. Lee