

# Lectura 1

## Conceptos Preliminares

### 1.1. Sistema y señal

El concepto de *sistema* resulta sumamente útil para la descripción, análisis y diseño en ingeniería, así como en otras áreas del conocimiento. Esto se debe principalmente a que permite describir en forma abstracta un objeto o un fenómeno de acuerdo al atributo del mismo que sea de interés para el ingeniero, por ejemplo, un calentador eléctrico puede ser estudiado como un sistema eléctrico, como un sistema térmico o como un mecanismo controlado por reloj. En consecuencia:

*La finalidad y carácter de un sistema varían según el juicio o los objetivos del observador.*

Aunque no es fácil encontrar una definición exacta de sistema, en un sentido amplio, podemos entender por sistema a “aquello que se va a estudiar”. Tal definición es extremadamente vaga, pero pone de manifiesto la necesidad de delimitar el objeto de estudio, de imponerle unas fronteras precisas, no necesariamente de naturaleza física. El propósito de este curso no es, por supuesto, estudiar cualquier tipo de sistema, sino un tipo específico de sistemas que suelen denominarse, en el contexto de la Física, la Matemática y la Ingeniería, como *sistemas dinámicos*. Para precisar qué tipo de sistemas son estos, necesitamos establecer una serie de atributos para tal clase de sistemas. Primero se establecerá una definición de sistema útil a nuestro propósito:

**Definición 1.1** *Un sistema es un conjunto bien delimitado de elementos que interactúan entre sí para cumplir con un objetivo u objetivos claramente definidos, los cuales no pueden llevarse a cabo de manera independiente por alguno de los elementos que forman al sistema.*

Esta definición es vaga a propósito, ya que permite describir situaciones tan disímiles como sea posible. En la figura 1.1 se presenta en forma esquematizada lo que debemos entender como sistema: un ente compuesto por elementos entrelazados entre sí que interactúan no sólo entre ellos sino también con su entorno, y que además, está bien definido a través de fronteras no necesariamente físicas.

**Observación 1.1** *Comúnmente las palabras **proceso** y **planta** se utilizan en ingeniería como sinónimos de sistema.*

Una vez definido el concepto de sistema, se introducirá ahora de una forma intuitiva el concepto de *sistema dinámico*. Una característica que debe cumplir un sistema para poder ser considerado un sistema dinámico, dentro de nuestro contexto, es que actúe ya sea como un almacenador o como un transformador de toda aquella energía que le es suministrada por su entorno. En consecuencia, partiremos de la suposición de que el objeto de estudio no es capaz de generar energía por sí solo a partir de la nada. La anterior suposición es en realidad un hecho que se cumple para todo sistema físico y que se justifica mediante la Ley Fundamental de la Termodinámica (La cual afirma que: "La energía ni se crea ni se destruye, simplemente se transforma en otro tipo de energía"). Este hecho constituye el principal atributo de los sistemas dinámicos que serán considerados, el cual se define a continuación:

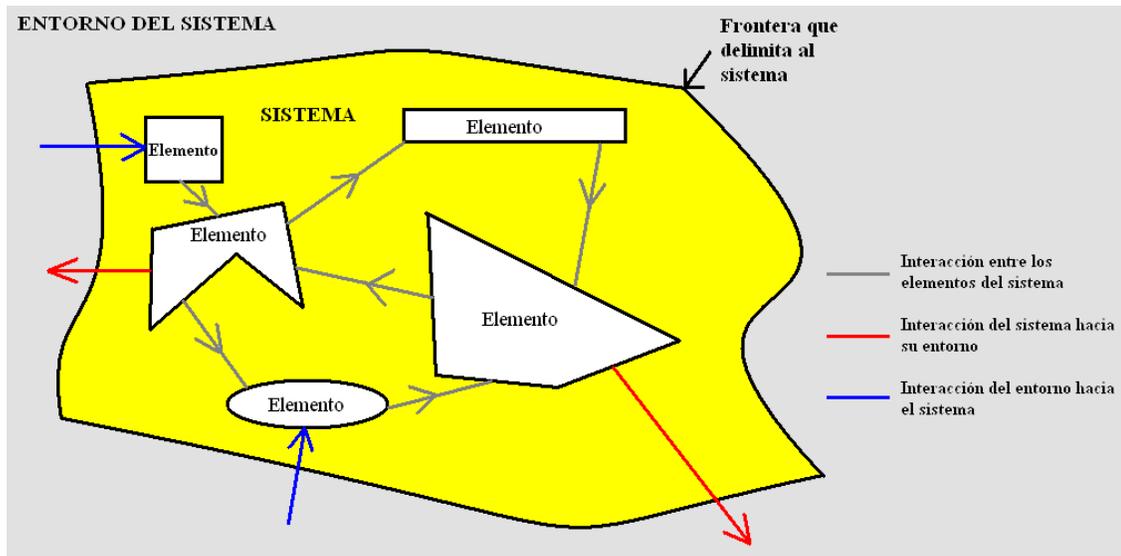


Figura 1.1: Estructura básica de un sistema

**Definición 1.2** Cuando un sistema no recibe energía del entorno y no posee ningún residuo de energía en su interior, se dice entonces que dicho sistema se encuentra en un estado de reposo, estado estático o simplemente que se encuentra relajado.

Suponga que un sistema, al que denominaremos  $G$ , se encuentra en reposo. Si en el instante de tiempo  $t$  el sistema es excitado mediante una inyección de energía por parte de su entorno, entonces  $G$  comenzará a procesar dicha energía. En consecuencia, el sistema comenzará a desarrollar una actividad a nivel interno, la cual puede ser observada o registrada a través de una serie de comportamientos que pueden ser representados numéricamente o simbólicamente a lo largo del tiempo (o del espacio). Estos comportamientos se denominarán *variables del sistema*.

**Definición 1.3** Todos aquellos comportamientos que un sistema físico genere como consecuencia de una excitación se denominarán **variables de sistema**, las cuales se denotarán como  $x(\cdot)$ .

**Definición 1.4** Se denomina *señal* a toda aquella información numérica, gráfica o simbólica capaz de representar cuantitativamente la evolución, ya sea en el tiempo o en el espacio, de las variables del sistema.

**Observación 1.2** Una señal puede ser expresada matemáticamente mediante una función del tiempo o de la frecuencia, o bien, mediante el registro de una secuencia de números o símbolos (banco de datos o gráficas de conducta).

**Ejemplo 1.1** Los latidos del corazón son señales que se producen a intervalos que varían de 80 a 120 pulsaciones por minuto.

**Ejemplo 1.2** En un circuito eléctrico formado por una fuente de voltaje, un capacitor y una resistencia, las variables de sistema son: voltajes, corrientes, cargas eléctricas, flujos magnéticos, calor en la resistencia, etc.

**Ejemplo 1.3** Las señales comúnmente empleadas para establecer la condición del clima en un país son: temperatura, humedad, velocidad y dirección del viento de las principales zonas geográficas.

**Ejemplo 1.4** Una sonda que explora el espacio exterior envía de regreso información acerca de un planeta lejano a una estación terrestre. La información puede tener la forma de imágenes del radar que representan perfiles de la superficie del planeta, imágenes infrarrojas que llevan información acerca de la temperatura del mismo, o imágenes ópticas que revelan la presencia de nubes alrededor del planeta.

Es importante tener siempre presente que *las señales son representaciones matemáticas de las variables del sistema*, que pueden ser expresadas con base en funciones o gráficas. Por ello:

**El primer paso en el estudio de un sistema es conocer las características y propiedades de las señales que pueda generar.**

**Definición 1.5** Cuando la señal es una función que depende de una sola variable se dice que la señal es **unidimensional**. Similarmente, si una función depende de dos o más variables independientes se dice entonces que es una señal multidimensional.

**Ejemplo 1.5** Cualquier variable cuya evolución dependa del tiempo pero no del espacio califica como señal unidimensional, y puede caracterizarse mediante una función matemática que sólo depende del tiempo, llamada señal temporal, por ejemplo: el sonido de un motor, el voltaje en una resistencia, la fuerza que un robot pueda aplicar, etc

**Ejemplo 1.6** En el caso de señales multidimensionales están: La presión atmosférica, la imagen en la pantalla de una televisión, el movimiento de una sonda de exploración en el planeta marte, los píxeles en una fotografía, etc.

**Definición 1.6** Se dice que una señal es **univaluada** si para cada instante de tiempo la función sólo puede tomar un único valor.

El valor que una señal univaluada puede tomar puede ser un número real, en cuyo caso hablamos de una señal de valor real, o puede ser un número complejo. El hecho de que las señales a considerar sean funciones únicamente del tiempo permite el empleo de gráficas fáciles de generar e interpretar. Por esto, el curso se centrará entonces en el estudio de señales unidimensionales asociadas a un sistema físico, definidas como funciones univaluadas del tiempo.

**Definición 1.7** Se denomina **forma de onda** de una señal a las variaciones en el valor de una señal como función del tiempo. Es decir, la forma de onda de una señal es la **traza** o **trayectoria** que la función de la señal produce en una gráfica.

Comúnmente, el comportamiento de un sistema es registrado en forma experimental y desplegado mediante graficas, para despues construir una función matemática que la aproxime (que la modele). Si esto no es posible, el ingeniero deberá conformarse con los datos recopilados en la experimentación y con la representación gráfica de la señal. Por otro lado, la representación gráfica suele ser un medio útil para la interpretación física de la señal.

**Ejemplo 1.7** Una inductancia eléctrica al ser excitada por una fuente sinusoidal de voltaje, presenta una reacción, la cual puede ser registrada mediante el uso de variables tales como el \_\_\_\_\_ entre de sus terminales de conexión, la \_\_\_\_\_ que circula en su bobinado o el \_\_\_\_\_ que se genera en su núcleo.

## 1.2. Señales de entrada y de salida

Todas aquellas señales de estímulo que el entorno aplique a un sistema  $G$  se denominarán **señales de entrada** y se denotarán mediante la letra  $u$ . Por otro lado, todos aquellos comportamientos que tienen lugar en el interior de un sistema  $G$ , como consecuencia de la aplicación de una señal de entrada, *y que el entorno es capaz de registrar* se denominarán **señales de salida** de  $G$ , las cuales se denotaran mediante la letra  $y$ . En otras palabras:

*Las señales de entrada y salida son el medio a través del cual el sistema interactúa con su entorno.*

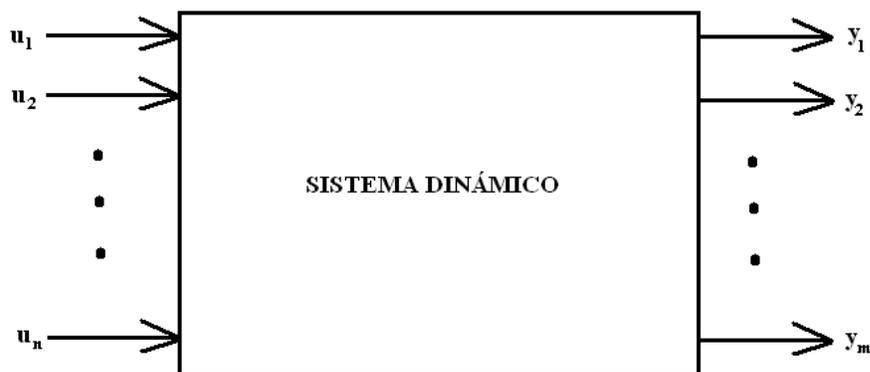


Figura 1.2: Esquema gráfico de un sistema y sus señales de entrada y de salida.

La Figura 1.2 muestra en forma gráfica ésta interacción: El sistema es representado por una “caja negra”, es decir, es un objeto perfectamente aislado de su entorno; Las flechas que apuntan hacia dicha caja, etiquetadas como  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , representan las  $m$ -entradas al sistema, mientras que las flechas que dan la apariencia de salir de la caja,  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , representan las  $p$ -señales de salida del sistema.

La representación esquemática de la Figura 1.2 es aplicable a cualesquier tipo de sistema ya que no requiere de información sobre la naturaleza física del mismo, del número y tipo de subsistemas o elementos que lo componen, ni tampoco sobre la manera en la cual dichos subsistemas o elementos actúan entre sí.

**Observación 1.3** *Generalmente, en el campo de la ingeniería, y con base en la gráfica anterior, un sistema es considerado como una caja dentro de la cual una determinada señal de entrada es “procesada” en una o varias señales de salida. En éste contexto, las señales de entrada suelen ser denominadas como causas o estímulos, mientras que las señales de salida suelen llamarse efectos o respuestas*

**Observación 1.4** *Una señal de entrada  $u(t)$  es entonces la representación matemática de la energía o información que el entorno inyecta al sistema.*

**Observación 1.5** *La señal de salida  $y(t)$  incluye en general a todas aquellas variables de interés para el análisis del sistema, por ejemplo, las variables que pueden ser físicamente medibles o aquellas cuyo comportamiento es de particular interés para algún determinado propósito, las cuales no siempre son físicamente medibles en forma directa.*

**Ejercicio 1.1** *Marque con una  $\times$  si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos*

Enunciado	Verdadero	Falso
Todas las variables de sistema son señales de salida		
Todas las variables de salida son variables de sistema		
Toda señal de entrada es una variable de sistema		

**Ejercicio 1.2** *Considere los elementos mostrados en la figura 1.3, los cuales conforman un “universo” particular de elementos físicos. Construya a partir de dicho universo un sistema eléctrico.*

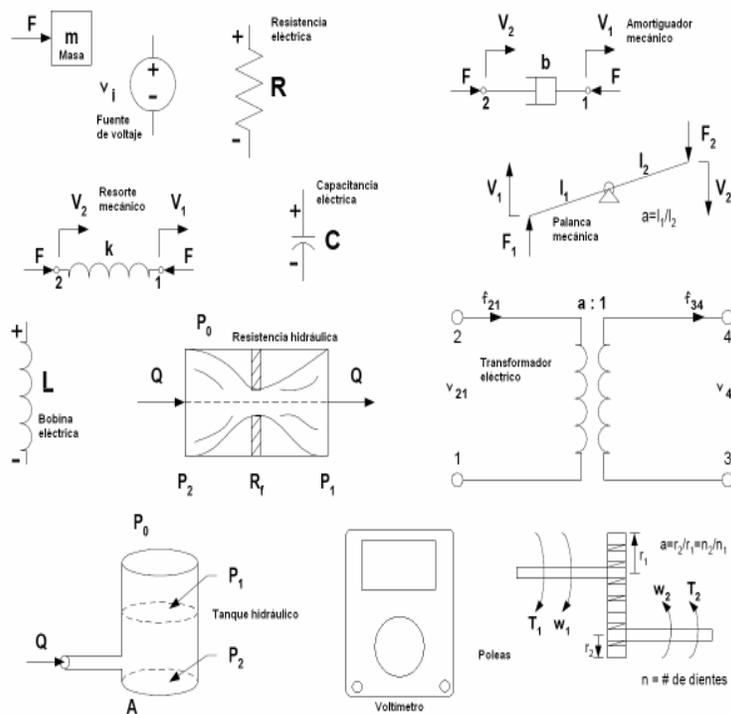


Figura 1.3: Universo de componentes físicos ideales para el ejemplo

**Definición 1.8** Cuando un sistema recibe una única señal de entrada y produce una única señal de salida, se dice que es un sistema **SISO** (del inglés Single Input Single Output), mientras que si recibe varias entradas y produce varias salidas, se dice que es un sistema **MIMO** (del inglés Multiple Input Multiple Output). También existen las denominaciones **MISO** para sistemas de varias entradas y una sólo salida, y **SIMO** para el caso en el que se tenga una entrada y varias salidas.

### 1.3. Condición inicial

Las respuestas de un sistema físico en el instante de tiempo en que empieza a ser observado pueden depender también de la energía ya existentes (almacenadas) en el interior del mismo. Los sistemas con esta capacidad de almacenamiento se denominan genéricamente como **sistemas dinámicos**.

**Ejemplo 1.8** ¿Cada vez que enciende el televisor o la radio éstos se encuentran siempre en el mismo canal o la misma estación?

**Ejemplo 1.9** ¿Cuando entra a su cuarto éste siempre se encuentra a la misma temperatura, independientemente de la hora o del día del año?

**Ejemplo 1.10** Todas las mañanas ¿usted amanece siempre con la misma condición física y anímica?

**Definición 1.9** Se denomina **condición inicial** (en el tiempo  $t_0$ ) al conjunto de variables  $\{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots\}$  del cual es posible extraer información sobre cómo el sistema ha procesado la energía que el entorno le ha suministrado desde el pasado hasta el instante presente  $t_0$ . El instante de tiempo  $t_0$  se conoce como **tiempo inicial**.

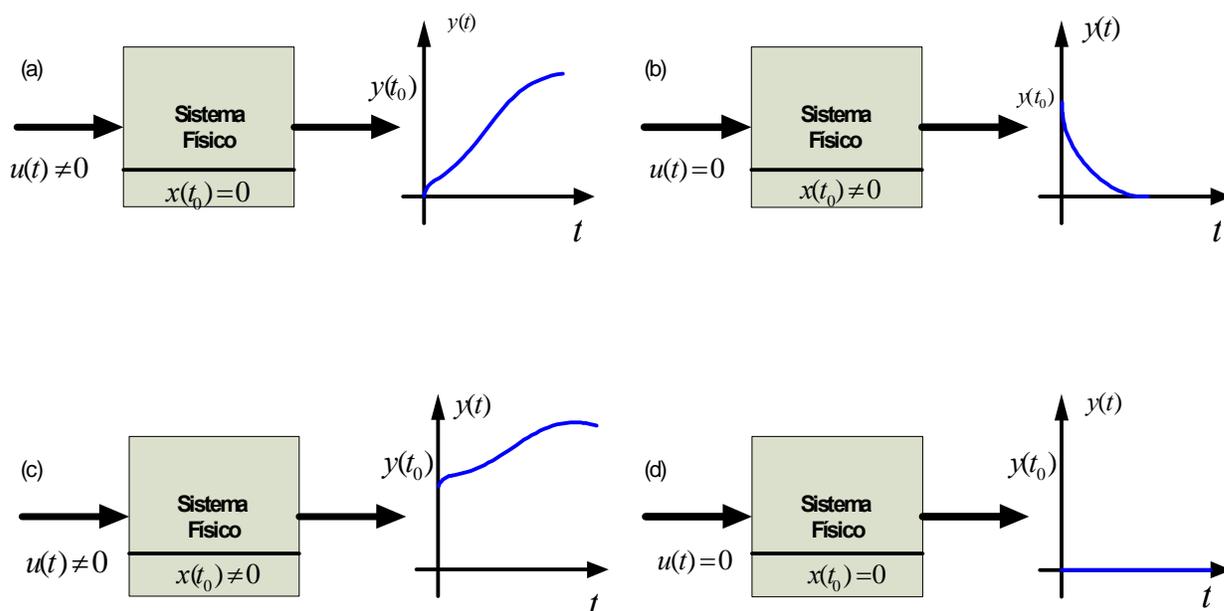


Figura 1.4: Distintos escenarios que muestran la relación entre la señal de salida y las señales de excitación de un sistema físico.

La condición inicial de un sistema es un parámetro que indica cuanta energía se ha almacenado en su interior desde el pasado hasta el instante en que comienza a ser observado. En cursos posteriores, se demostrará como las condiciones iniciales constituyen un indicador de la historia pasada (**memoria**) de las variables del sistema. Debido a que los sistemas físicos que se considerarán en el curso son sistemas que de manera natural procesan energía, si no hay ninguna fuente de energía externa alimentándolos, entonces procesarán la energía que conserven en su interior. Es debido a este hecho que las condiciones iniciales son referidas como **señales de excitación interna** del sistema.

En resumen, los escenarios bajo los cuales un sistema físico presentará un comportamiento son:

1. Cuando el sistema se encuentre sometido únicamente a señales de excitación externa (señales de entrada), véase la figura (1.4-a)
2. Cuando el sistema se encuentre sometido únicamente a señales de excitación interna (condiciones iniciales), véase la figura (1.4-b)
3. Cuando el sistema se encuentre sometido a excitaciones tanto internas como externas, véase la figura (1.4-c).

**Ejercicio 1.3** ¿Que nombre recibe el estado del sistema bajo las condiciones de excitación mostradas en la figura (1.4-d).

## 1.4. Representación matemática de sistemas

Un sistema físico puede ser estudiado con la intención de satisfacer alguno o varios de los siguientes objetivos:

- a) **Análisis del comportamiento** (análisis dinámico). Este estudio tiene como objeto conocer el comportamiento del sistema y sus propiedades para así tener la capacidad de **predecir** su conducta ante determinadas condiciones de operación, es por tanto un procedimiento que busca responder a las preguntas: ¿Cómo funciona el sistema?, ¿Cómo se comportará el sistema si es puesto a trabajar en un determinado contexto?
- b) **Rediseño de sistemas y optimización de desempeño**. Esta es una etapa que se aplica comúnmente en caso de que el comportamiento o el desempeño del sistema fallen en satisfacer determinados índices de desempeño. Consiste en determinar el tipo de **modificaciones** que deben realizarse sobre el sistema para que este cumpla los requerimientos que se solicitan, es decir, busca responder a la pregunta: ¿Cómo debe el sistema ser modificado para que cumpla con un determinado objetivo u objetivos?. Si los resultados de este estudio no pueden ser aplicados debido a que el sistema no puede ser modificado por el ingeniero, entonces será necesario realizar el siguiente estudio.
- c) **Diseño de controladores**. Esta etapa busca construir dispositivos (llamados controladores) tales que al ser conectados al sistema el comportamiento de éste cambie de manera tal que se satisfagan las especificaciones de conducta establecidas. La pregunta que se desea responder es entonces: ¿Qué debe agregarse al sistema para que su comportamiento sea satisfactorio?

Si uno tiene los recursos, la capacidad y el tiempo que se requieren, entonces lo ideal es construir o adquirir el sistema que se desee analizar para someterlo a todas las pruebas de laboratorio necesarias para realizar el estudio. Sin embargo, y por lo general, esto no es posible. Entonces, el ingeniero debe construir un objeto que sea capaz de imitar de manera adecuada el comportamiento real del sistema. Esta clase de objetos se conocen como *modelos de sistema*.

**Definición 1.10** *Un modelo es una representación siempre simplificada que busca imitar el comportamiento real de un sistema, capturando aquellos aspectos que se considere son esenciales para su estudio*

De manera general, los modelos de sistema pueden clasificarse de la siguiente forma:

- A) **Modelos abstractos**. Este es el nombre que recibe una familia de modelos compuesta principalmente por
1. *Modelos Mentales*. Es toda aquella imagen (inconciente) del funcionamiento de un proceso (p.e. los deportista hacen uso de la mecánica en el manejo de sus cuerpos, un conductor posee en su mente un modelo sobre las propiedades de manejo de un auto). Este tipo de modelos se desarrollan mediante el entrenamiento y la experiencia
  2. *Modelos verbales/textuales*. Son todas aquellas descripciones de la constitución o del comportamiento de un sistema (p.e. instrucciones de operación y/o descripción de una maquinaria)
  3. *Modelos Gráficos*. Representación basada en una simbología específica: Planos, esquemas, diagramas de bloques, gráficas de línea, redes de Petri, etc. Véase (1.5-a)
  4. *Modelos Matemáticos*. Son aquellos que describen en forma matemática o numérica las relaciones que existen entre los fenómenos que tienen lugar en un sistema. Se dividen en dos subfamilias:
    - *Modelos funcionales*: Son modelos contruidos con base en funciones matemáticas o en gráficas de una o varias variables. Buscan capturar determinados comportamientos o características de un sistema mediante ecuaciones o gráficas de algún tipo, cuya solución sea relativamente fácil de calcular y de interpretar. Permiten aplicar métodos matemáticos de análisis cualitativo (p. e. estabilidad, propiedades dinámicas, etc), y cuantitativo (resolución de ecuaciones, etc), véase (1.5-b).

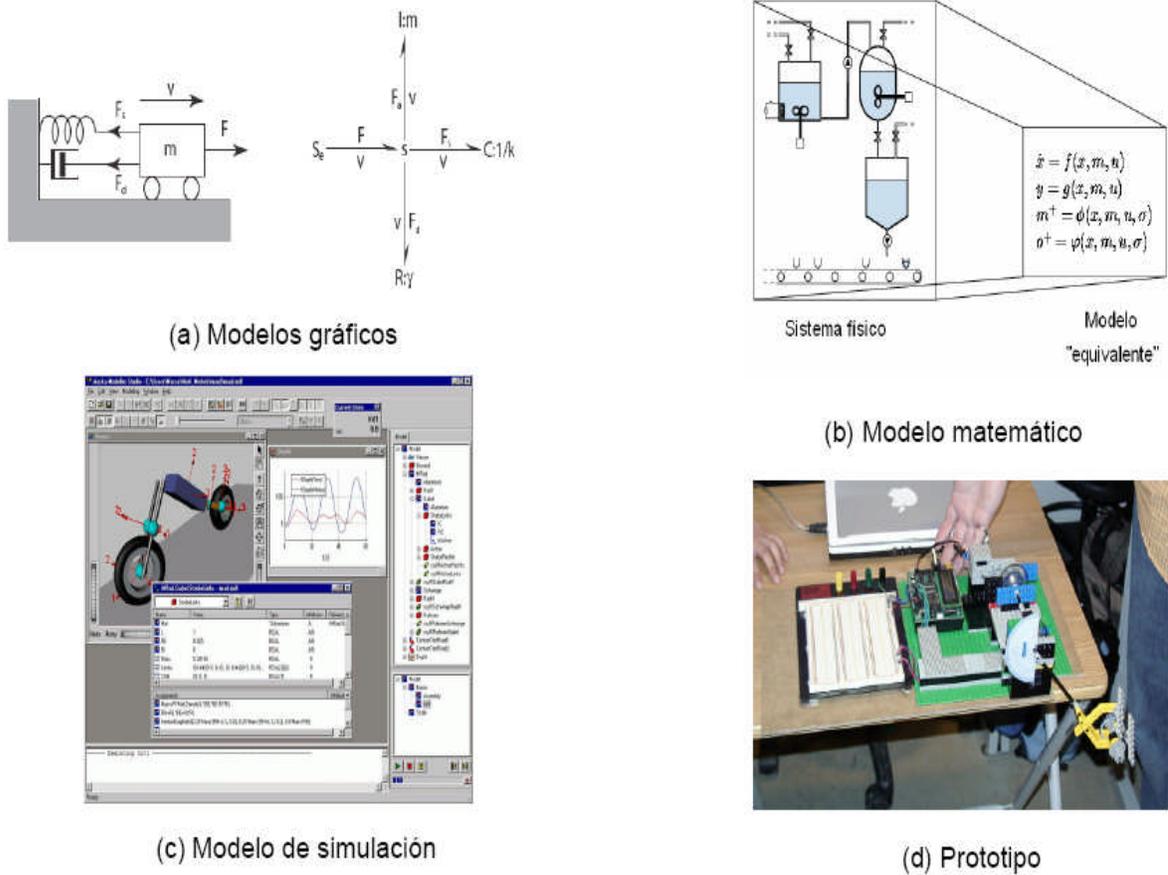


Figura 1.5: Ejemplos de modelos de sistema

- *Modelos de simulación*: Cuando las ecuaciones de un sistema son demasiado complejas para ser estudiadas en forma analítica, se hace necesario programarlas en una computadora para que sea ésta quien calcule e interprete la solución de dichas ecuaciones. Este proceso se conoce como **simulación digital** o simplemente **simulación** y es muy empleada sobre todo en el estudio de fenómenos climáticos, económicos o biológicos, por mencionar algunos ejemplos, véase(1.5-c).

B) **Modelos físicos, prototipos o modelos a escala**. Estos son los nombres que reciben todas aquellas representaciones a escala del sistema original. Se basan en la Teoría de la Semejanza: Cuando un fenómeno o proceso resulta ser demasiado complejo para ser analizado mediante modelos matemáticos o de simulación, es común el construir una *réplica* física del proceso a una escala adecuada. Los experimentos que pueden ser realizados con estos modelos permiten realizar análisis bajo distintas condiciones de operación y condiciones controladas. Este tipo de modelos sin duda permiten realizar pruebas a un nivel más realista que los modelos anteriores. Ejemplo de esta clase de modelos pueden encontrarse principalmente en aeronáutica y en ingeniería hidráulica o naval. En la figura (1.5-d) puede observarse el ejemplo de un prototipo de circuito eléctrico.

En el curso sólo se emplearán modelos matemáticos y de simulación. Si el modelo matemático es planteado adecuadamente, entonces su estructura será la de una ecuación o conjunto de ecuaciones que relacionen a

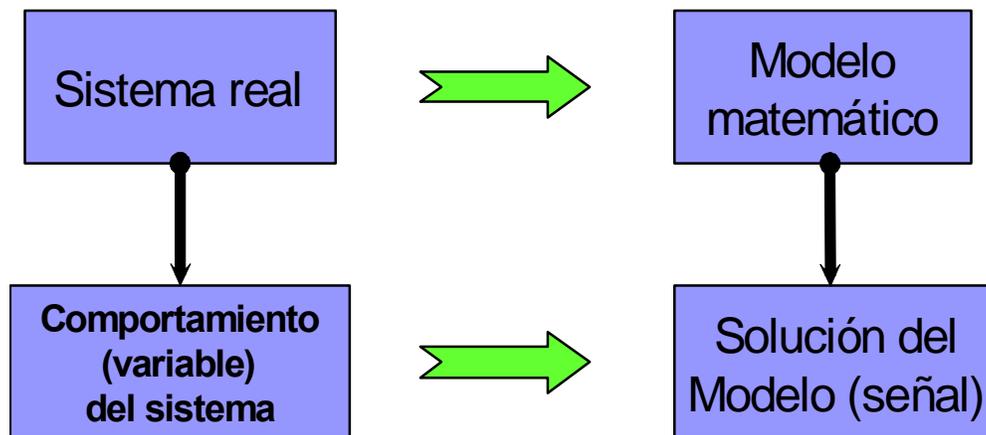


Figura 1.6: Relaciones entre los conceptos de sistema, comportamiento de sistema, modelo y señal.

cada una de las variables del sistema, y cuyas soluciones calificarán como una representación matemática del comportamiento dinámico del sistema (señales del sistema) véase la figura (1.6).

Es claro que existen diferentes formas de describir un sistema, lo cual da lugar a diferentes modelos, según sea el aspecto del sistema que interesa describir con mayor énfasis. Por ejemplo, un motor eléctrico podría ser de interés como sistema de conversión electro-mecánica, como un sistema térmico, un sistema mecánico sujeto a vibraciones, o bien, sólo podría interesar el estudio del comportamiento de los componentes mecánicos que lo conforman. Por este motivo, debe quedar claro que la decisión fundamental a la hora de modelar un sistema es definir el **propósito**, es decir, aquellos aspectos esenciales que se desea capturar.

Una vez que un sistema físico ha sido expresado matemáticamente en forma satisfactoria, el análisis de su comportamiento podrá realizarse en el contexto de las matemáticas aplicadas con independencia de la naturaleza física de dicho sistema. Sin embargo, una vez finalizado el análisis:

*La interpretación de los resultados obtenidos sólo podrá ser realizada con base en la naturaleza del sistema.*

Para que los conceptos de modelo de sistema y señal sean útiles, deben satisfacer dos criterios. Primero, la señal o el modelo de sistema deben reflejar con suficiente precisión el proceso físico observado. Esto es, la representación matemática obtenida debe ser comparada con las observaciones del proceso físico y debe concordar en un nivel aceptable de exactitud. Es en este punto que la caracterización del proceso físico es crítica. A menor precisión en la concordancia de la señal o el modelo con las observaciones, menor precisión habrá en el entendimiento del proceso físico. Segundo, la expresión matemática debe proveer información útil. Si el proceso físico es complejo, con frecuencia se desarrolla un modelo complicado que pareciera describir exactamente las observaciones experimentales. Sin embargo, tal modelo complejo podría no ser manejable mediante las herramientas de análisis conocidas. Por tanto, no estaríamos en capacidad de desarrollar una información útil acerca del proceso. En el otro extremo, si el modelo se simplifica demasiado, no reflejaría algunos de los aspectos interesantes del proceso físico. De nuevo, el modelo no cumpliría con el propósito de utilidad. En conclusión, cuando se pretenda analizar un sistema por primera vez, es conveniente desarrollar primero un modelo simplificado del mismo para obtener una idea general de la solución. Posteriormente se desarrolla un modelo matemático más complejo para realizar un análisis más pormenorizado.

En resumen el estudio de los sistemas físicos depende de lo siguiente:

1. Los elementos que conforman al sistema y su interconexión (modelo matemático).
2. Los estímulos, entradas o excitaciones aplicados al sistema
3. Las respuestas o reacciones del sistema ante las excitaciones externas o internas

4. La historia del comportamiento del sistema, condensada en las condiciones iniciales
5. El tiempo como variable independiente

### 1.4.1. Clasificación de los Modelos Matemáticos

En ingeniería existen diferentes tipos de sistemas, los cuales pueden ser aproximados por modelos matemáticos igualmente diversos. Para poder elaborar una clasificación de los modelos matemáticos primero se debe seleccionar un criterio que permita distinguir de una manera precisa las propiedades y/o las características que debe poseer un modelo, afín de poderlo ubicar dentro de la clasificación. Las siguientes definiciones ayudarán a puntualizar qué tipo de modelos matemáticos son los que se pretenden estudiar, según se observa en la Figura 1.7.

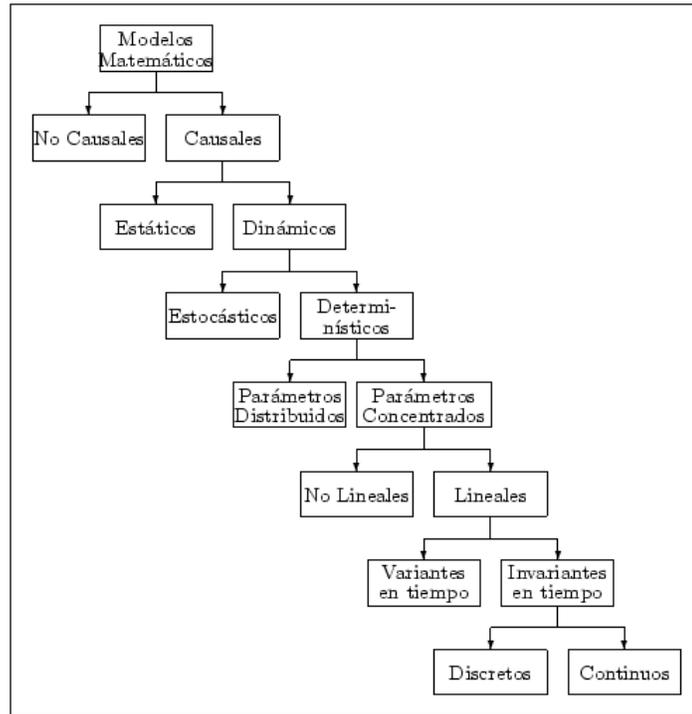


Figura 1.7: Ramificación de las características de los sistemas que se busca estudiar

#### Modelos Causales y No Causales:

El estado de un **sistema causal** depende sólo de las condiciones presentes y pasadas, pero no de las futuras, es decir hay una relación de causa y efecto. Todos los sistemas físicos son causales, pero uno puede concebir modelos de ciertos sistemas que no lo sean (sistemas anticipativos). En el curso se estudiarán sólo sistemas causales

#### Modelos Estáticos y Dinámicos:

Cuando el estado, en un instante de tiempo  $t$ , de un sistema se vea influenciado por las señales de entrada que le sean suministradas únicamente en el tiempo  $t$ , se dice entonces que el sistema es un **sistema estático**. En contraposición, el estado de un sistema dinámico en un tiempo  $t$  depende no sólo de las señales de entrada que le sean suministradas únicamente en el tiempo  $t$ , sino también de lo que haya sucedido en el pasado con

el sistema. Esto se debe a que en el sistema hay algún tipo de almacenamiento de energía. Por lo anterior, los sistemas dinámicos también se conocen como *sistemas con memoria*. Los modelos de sistemas dinámicos son ecuaciones de tipo diferencial o en diferencias, mientras que los sistemas estáticos pueden ser caracterizados mediante ecuaciones algebraicas. En el curso se estudiarán sólo sistemas dinámicos de tipo diferencial.

#### **Modelos Estocásticos y Determinísticos:**

En ocasiones se sabe que existen variables que afectan el sistema pero no es posible predecir el valor que éstas puedan tomar. Una de las alternativas para hacer frente a estos casos consiste en considerar que esa variable es aleatoria y buscar técnicas basadas en la teoría de probabilidades para analizar el sistema. Un modelo que incluya variables aleatorias es un *modelo estocástico*, mientras que modelos exentos de aleatoriedad se denominan *modelos determinísticos*. Éstos últimos serán los que se estudien en este curso.

#### **Modelos de Parámetros Concentrados y Distribuidos:**

La mayoría de los fenómenos físicos ocurren en una región del espacio, pero en muchas ocasiones es posible representar ese fenómeno como algo puntual, por ejemplo, para estudiar la atracción entre el sol y la tierra es posible representar toda la masa de cada uno de esos cuerpos concentrada en un único punto (su centro de gravedad).

Sin embargo, otros fenómenos como la transmisión de ondas electromagnéticas, o las olas en el mar requieren una representación que considere qué está sucediendo en cada punto del espacio, en este caso se necesita un *modelo de parámetros distribuidos* en el espacio, en contraposición de los *modelos de parámetros concentrados* o puntuales. Los modelos de parámetros distribuidos implican ecuaciones diferenciales con derivadas parciales y no serán estudiados en este curso. Por otro lado, los modelos de parámetros concentrados se construyen en base a ecuaciones con derivadas o ecuaciones de diferencia ordinarias .

#### **Modelos Lineales y No Lineales:**

La linealidad es en realidad dos propiedades agrupadas bajo un mismo nombre. Estas propiedades son:

- Proporcionalidad: En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales al duplicar las entradas en una determinada proporción se duplican las salidas en esa misma proporción.
- Superposición: En términos prácticos, esto significa que en los modelos lineales de varias entradas, la señal de salida es igual a la suma de las salidas que produce el sistema cuando se le aplican las entradas en forma individual.

En este curso se estudiarán modelos lineales.

#### **Modelos Variantes e Invariantes en el Tiempo:**

Un modelo se dice invariante en el tiempo cuando las propiedades del sistema modelado se consideran constantes en el tiempo. En caso contrario se dice variante en el tiempo. Nótese que la variación se refiere a las propiedades (parámetros) del sistema, no de las señales que le afectan (variables). En este curso se considerarán sistemas invariantes en el tiempo.

#### **Modelos Continuos y Discretos:**

Los modelos en tiempo discretos son aquellos en los cuales una o más de las variables de sistema cambian sólo en valores discretos del tiempo. Estos instantes, comúnmente denotados como  $kT$  o  $t_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), se denominan tiempos de muestreo. Esta clase de modelos se representa matemáticamente mediante ecuaciones en diferencias.

Los modelos en tiempo continuos o modelos analógicos son aquellos en los cuales las variables de sistema cambian en todo instante de tiempo. Estos modelos se componen de ecuaciones diferenciales.

De acuerdo con las descripciones anteriores, en este curso se emplearán modelos matemáticos causales, dinámicos, determinísticos, de parámetros concentrados, lineales, invariantes en el tiempo, para el caso en el cual la variable del tiempo es continua.

**Ejercicio 1.4** *Clasifique los siguientes modelos*

$$a) 3x(t) = 2\text{sen}(t)$$

$$b) 3 \frac{dx(t)}{dt} = -5x(t) + 2\text{sen}(t)$$

$$c) 3 \frac{dx(t)}{dt} = 2\text{sen}(t)x(t)$$

$$d) 3 \frac{\partial x(t)}{\partial x} = 2x(t)$$

$$e) 3 \frac{dx(t)}{dt} = 2\text{sen}(x(t))$$

$$f) x(2) = 2x(1)$$

$$g) \frac{dx(t)}{dt} = -3x^2(t)$$

$$h) \frac{dx(t)}{dt} = -3tx^2(t)$$