PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
2007-2008

Organisée par

l'ACADÉMIE DE VERSAILLES
3, boulevard de Lesseps 78017 Versailles

l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD
Faculté des sciences d'Orsay 91405 Orsay

et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES
Ecole Normale Supérieure, 45 Rue d'Ulm, 75005 Paris

Objectifs de la Préparation

Cette préparation vise à détecter des lycéens qui éprouvent du plaisir à faire des Mathématiques c'est-à-dire des futurs chercheurs en Mathématiques.

Contenu de la Préparation

Des lycéens sont formés à résoudre des problèmes difficiles qui sont néammoins dans le cadre de leur programme scolaire. Il ne s'agit nullement de faire en avance le programme. Le choix des exercices se fait parmi les dizaines de milliers d'exercices donnés aux Olympiades Régionales et Nationales de tous les pays du monde ainsi qu'aux Olympiades Internationales. Un grand nombre d'exercices d'Olympiades sont repris aux oraux des concours de Grandes Ecoles. C'est pour cette raison que dans la préparation sont proposés beaucoup d'exercices donnés aux oraux des Concours de Grandes Ecoles. Aussi surprenant que cela puisse paraître, ces exercices sont résolus par les lycéens assistant à la préparation. La véritable raison est que ces exercices nécessitent très peu de connaissances mais exigent une grande perspicacité. On veut donc développer les qualités scientifiques des lycéens, leur aptitude à la Recherche. Il s'agit avant tout de juger la capacité de prendre des initiatives, d'utiliser une indication, de mener à bien une démarche.

Déroulement de la Préparation

Chaque séance se déroule sur le modèle de l'oral des Ecoles Normales Supérieures: c'est un long dialogue entre les élèves et l'enseignant, qui tout au long de la séance fournit des indications, quand c'est nécessaire, pour relancer la réflexion des élèves et tester leurs réactions.Voilà pourquoi les exercices posés ont un contenu mathématique riche, sont très éloignés du simple exercice technique, d'application du cours, qu'ils soient souvent difficiles. Ils visent la plupart du temps à la démonstration d'un résultat mathématique significatif.

Les élèves viennent les samedis de 14h à 18h en salle 227 2ème étage du bâtiment de Mathématiques à l'Université Paris 11, Campus d'Orsay. Il n'y a ni devoirs maison ni devoirs surveillés. Il n'y a aucune contrainte à part celle d'éprouver du plaisir à faire des Mathématiques. Cette activité doit être mise sur le même plan qu'écouter du Bach par exemple.

==

Samedi 15 Septembre 2007 14h-17h

1)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1992/1) Trouver tous les entiers a, b, c tels que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divise $abc-1$ avec $1 < a < b < c$.

2) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1993/1) Soit $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ où $n \geq 2$ est un entier. Montrer que $f(x)$ ne peut pas être exprimé comme le produit de 2 polynômes à coefficients entiers et de degré ≥ 1.

==

Samedi 22 Septembre 2007 14h-17h

3)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1979/1) Soient p, q les entiers naturels tels que $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Montrer que p est divisible par 1979.

4) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1994/4) Trouver tous les couples (m, n) d'entiers positifs tels que $\frac{n^3+1}{mn-1}$ soit un entier.

==

Samedi 29 Septembre 2007 14h-17h

5)(Olympiades Internationales de Mathématiques 2006/4) Trouver les couples d'entiers (x, y) tels que $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.

6) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1979/5) Trouver tous les réels a tels qu' il existe des réels positifs $x_1, ..., x_5$ satisfaisant aux relations $\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3$.

7) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1982/4) Montrer que si n est un entier positif tel que l' équation $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ ait une solution entière (x, y) alors elle a au moins 3 solutions entières. Montrer que l'équation n'a pas de solutions entières quand $n = 2891$.

==

Samedi 06 Octobre 2007 14h-17h

8)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1961/3) Résoudre l'équation $cos^n x - sin^n x = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

9) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1965/2) On considère le système de 3 équations:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

dont les coefficients vérifient les trois conditions suivantes: (a) $a_{11}, a_{22}, a_{33} > 0$ (b) les autres coefficients sont < 0 (c) dans chaque équation la somme des coefficients est > 0. Montrer que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ est la seule solution du système.

10) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1965/4) Trouver 4 nombres réels x_1, x_2, x_3, x_4 tels que la somme de l'un quelconque et le produit des 3 autres soit égal à 2.

11) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1967/3) Soit $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m + k + 1$ soit un nombre premier et $m + k + 1 > n + 1$. On note $c_s = s(s+1)$. Montrer que $c_1 c_2 ... c_n$ divise $(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)...(c_{m+n} - c_k)$.

==

Samedi 13 Octobre 2007 14h-17h

12)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1975/4) Soient A la somme des chiffres du nombre 4444^{4444} et B la somme des chiffres du nombre A. Trouver la somme des chiffres du nombre B sans calculer 4444^{4444}.

13) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1974/3) Existe-t-il un entier n pour lequel le nombre $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ est divisible par 5?

14) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1976/2) Soit $P_1(x) = x^2 - 2$ et pour $j = 2, 3, ...$ on pose $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$. Montrer que pour n arbitraire les racines de l'équation $P_n(x) = x$ sont réelles et distinctes.

15) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1972/3) Soient m et n des entiers positifs ou nuls. Montrer que $m!n!(m+n)!$ divise $(2m)!(2n)!$.

===

Samedi 20 Octobre 2007 14h-17h

16)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1969/2) Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des constantes réelles et $y(x) = cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2}cos(a_3 + x) + ... + + \frac{1}{2^{n-1}}cos(a_n + x)$. Si x_1, x_2 sont réels et $y(x_1) = y(x_2) = 0$, montrer que $x_1 - x_2 = m\pi$ pour un certain entier m.

17) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1976/6) On définit la suite (u_n) par récurrence en posant $u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 2) - u_1, \quad u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{5}{2}$. Montrer que $[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$.

18) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1970/4) Pour quels entiers naturels n le produit de certains des nombres $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ est-il égal au produit des nombres restants?

19) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1968/3) Soient $a \neq 0, b, c$ des nombres réels. Montrer que le système

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \quad ... \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

a une solution réelle unique si et seulement si $(b-1)^2 - 4ac = 0$.

20) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1999/4) Trouver tous les couples d'entiers positifs (n, p) tels p soit premier, $n \leq 2p$ et n^{p-1} divise $(p-1)^n + 1$.

===

Samedi 27 Octobre 2007 14h-17h

21)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1960/1) Trouver tous les nombres à 3 chiffres pour lesquels on obtient, quand on divise le nombre par 11, la somme des carrés des chiffres du nombre initial.

22)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1963/4) Trouver toutes les solutions $x_1, ..., x_5$ du système d'équations

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$$

où y est un paramètre réel.

23)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1964/1)
(a) Trouver tous les entiers naturels n tels que le nombre $2^n - 1$ soit divisible par 7.
(b) Montrer que pour tous les entiers naturels n le nombre $2^n + 1$ n'est pas divisible par 7.

24)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1966/4) Montrer l'égalité suivante:

$$\frac{1}{sin2x} + \frac{1}{sin4x} + \frac{1}{sin8x} + ... \frac{1}{sin2^nx} = cotanx - cotan2^nx$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $2^kx \notin \pi\mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

25)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1966/5) Résoudre le système

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases}$$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des nombres réels distincts.

==

Samedi 10 Novembre 2007 14h-17h

26) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1962/1) Trouver le plus petit $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient les 2 conditions suivantes:

(a) il se termine par 6 (b) en déplaçant ce 6 à l'avant on obtient $4n$.

27) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1968/2) Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $p(n) = n^2 - 10n - 22$ où $p(n)$ est le produit des chiffres de n.

28)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1969/1) Montrer qu'il existe une infinité de $a \in \mathbb{N}$ avec la propriété suivante: le nombre $n^4 + a$ n'est premier pour aucun $n \in \mathbb{N}$.

29)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1981/3) Trouver le maximum de $m^2 + n^2$ où $m, n \in \{1, 2, ..., 1981\}$ vérifient $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

==

Samedi 17 Novembre 2007 14h-17h

30) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1984/2) Trouver $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que 7 ne divise pas $a, b, a + b$ mais 7^7 divise $(a + b)^7 - a^7 - b^7$.

31) (Olympiades Internationales de Mathématiques 2002/4) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ayant pour diviseurs $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. On pose $S = d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k$. Montrer que $S \leq n^2$. Déterminer quand S divise n^2.

32) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1986/1) L'ensemble $S = \{2, 5, 13\}$ a la propriété que pour tout $a, b \in S, a \neq b$, le nombre $ab - 1$ est un carré parfait. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}, d \notin S$, l'ensemble $S \cup \{d\}$ n'a pas la propriété ci-dessus.

33)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1978/1) Soient $m, n \in \mathbb{N}, n > m \geq 1$ tels que les trois derniers chiffres de 1978^m et 1978^n coincident.Trouver m, n tels que $m + n$ soit minimal.

34)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1976/4) Trouver le plus grand nombre obtenu comme le produit d'entiers positifs dont la somme est 1976.

==

Samedi 24 Novembre 2007 14h-17h

35) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1995/4) Les nombres réels strictement positifs $x_0, x_1, ..., x_{1995}$ satisfont aux conditions: $x_0 = x_{1995}$ et $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ pour $i = 1, 2, ..., 1995$. Trouver la valeur maximale que x_0 peut prendre.

36) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1977/4) Soient a, b, A, B des constantes réelles et $f(x) = 1 - acosx - bsinx - Acos2x - Bsin2x$. Montrer que si $f(x) \geq 0$ pour tout réel x alors $a^2 + b^2 \leq 2$ et $A^2 + B^2 \leq 1$.

37)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1977/5) Trouver $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $q^2 + r = 1977$ où q et r sont le quotient et le reste de la division de $a^2 + b^2$ par $a + b$.

==

Samedi 01 Décembre 2007 14h-17h

38) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1964/2) On note a, b, c les côtés d'un triangle. Montrer que $a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$

39) (Olympiades Internationales de Mathématiques 1983/6) On note a, b, c les côtés d'un triangle. Montrer que $a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$

40)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1968/5) Soient $a > 0$ un nombre réel et f une fonction réelle définie sur tout $\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(a) Montrer que la fonction f est périodique, i.e., il existe $b > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R}, \quad f(x + b) = f(x)$.
(b) Donner un exemple d'une telle fonction non constante pour $a = 1$.

41)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1961/2) On note a, b, c les côtés d'un triangle et S son aire. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$. Dans quel cas a-t-on égalité?

42)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1965/5) On se donne un triangle OAB tel que $\widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$ et M un point quelconque du triangle différent de O. On note P et Q les pieds des perpendiculaires abaissés de M sur OA et OB. Soit H l'orthocentre du triangle OPQ. Trouver le lieu des points H quand (a) M appartient au segment A (b) M appartient à l'intérieur du triangle OAB.

43)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1966/2) Soient a, b, c et α, β, γ les côts et les angles correspondants d'un triangle ABC. Montrer que si $a + b = tan\frac{\gamma}{2}$ alors le triangle est isocèle.

44)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1974/5) Si a, b, c, d sont des nombres réels strictement positifs, trouver toutes les valeurs possibles de $S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}$.

==

Samedi 08 Décembre 2007 14h-17h

45)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1985/1) Un cercle dont le centre est sur le côté ED du quadrilatère cyclique $BCDE$ touche les trois autres côtés. Montrer que $EB + CD = ED$.

46)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1981/1) Trouver le point P à l'intérieur du triangle ABC pour lequel $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ est minimal, où PD, PE, PF sont les perpendiculaires abaissés de P sur BC, CA, AB.

47)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1982/1) Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ une fonction telle que $f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ or $1, f(2) = 0, f(3) > 0$ et $f(9999) = 3333$. Calculer $f(1982)$.

48)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1959/4) Construire un triangle rectangle dont l'hypothénuse c est donnée sachant que la médiane partant de l'angle droit est égal à la moyenne géométrique des deux autres côtés du triangle.

49)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1986/5) Trouver, avec démonstration, toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que (i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ (ii) $f(2) = 0$ mais $f(x) \neq 0$ pour $0 \leq x < 2$.

==

Samedi 15 Décembre 2007 14h-17h

50)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1959/5) Un segment AB est donné et sur lui un point M. Du même côté de AB les carrés $AMCD$ et $BMFE$ sont construits. Les cercles circonscrits aux deux carrés, dont les centres sont P et Q, se coupent en M et N. (a) Montrer que les lignes FA et BC se coupent en N. (b) Montrer que toutes les lignes MN passent par un même point S, indépendamment du choix de M. (c) Trouver le lieu des milieux des segments PQ, quand M se déplace sur AB.

51)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1988/3) Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifie les relations $f(1) = 1, f(3) = 3, f(2n) = f(n), f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$. Déterminer avec preuve le nombre d'entiers $1 \leq n \leq 1988$ pour lesquels $f(n) = n$.

52)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1973/3) Déterminer le minimum de $a^2 + b^2$ si a et b sont des réels pour lesquels l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ a au moins une solution réelle.

==

Samedi 22 Décembre 2007 14h-17h

53)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1981/6) Supposons que $f(x, y)$ soit définie pour $x, y \in \mathbb{N}$ et que l'on ait les relations: $f(0, y) = y+1, f(x+1, 0) = f(x, 1), f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$. Déterminer $f(4, 1981)$.

54)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1979/3) On se donne 2 cercles sur le plan. Soit A un des points d'intersection de ces cercles. Deux points commencent à se déplacer simultanément de A avec des vitesses constantes, chaque point le long de son propre cercle. Les 2 points reviennent en A en même temps. Montrer qu'il existe un point P sur le plan tel qu'à chaque instant les distances de P aux points mobiles soient égaux.

55)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1995/2) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels $abc = 1$. Montrer que $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

56)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1966/1) Trois problèmes A, B, C sont donnés aux olympiades mathématiques. Les 25 étudiants ont résolu au moins un problème. Le nombre de ceux qui ont résolu B mais pas A est le double du nombre de ceux qui ont résolu B mais pas A. Le nombre de ceux qui ont résolu uniquement A est égal à 1+ le nombre de ceux qui ont résolu en plus de A au moins un autre problème. Combien d'étudiants ont résolu uniquement B?

==

Samedi 12 Janvier 2008 14h-17h

57)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1960/4) Construire un triangle ABC connaissant la longueur des hauteurs issus de A et de B ainsi que la longueur de la médiane issue de A.

58)(Olympiades Internationales de Mathématiques 2000/2) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $abc = 1$. Montrer que $(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1$.

59)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1979/6) Soient A et E deux sommets opposés d'un octogone régulier. Un compteur part de A et à chaque seconde saute dans un des sommets adjacents d'une manière aléatoire. Le procédé s'arrête quand il atteint E. Soit a_n le nombre de chemins distincts de durée n secondes que le compteur suit pour aller de A à E. Montrer que $a_{2n-1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}((2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

60)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1983/1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que (i) $f(xf(y)) = yf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (ii) $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

==

Samedi 19 Janvier 2008 14h-18h

61)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1966/6) Soient M, K, L des points des segments AB, BC, CA. Montrer que l'aire d'au moins un des 3 triangles MAL, KBM, LCK est plus petite ou égale au quart de l'aire du triangle ABC.

62)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1992/2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

63)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1972/4) Résoudre le système d'inéquations:

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

64)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1981/2) Soit $f(n, r)$ la moyenne arithmétique des minimas des sous-ensembles à r éléments dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$. Montrer que $f(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$.

65)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1994/2) Soit N un point quelconque de la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Soient P, O des points sur les droites AB, AN tels que $\widehat{ANP} = \frac{\pi}{2} = \widehat{APO}$. Soit Q un point quelconque de NP; une droite quelconque passant par Q rencontre les droites AB, AC en E, F. Montrer que $\widehat{OQE} = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si $QE = QF$.

==

Samedi 26 Janvier 2008 14h-18h

66)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1961/5) Construire un triangle ABC connaissant $AC = c, AB = c$ et $\widehat{AMB} = \omega < \frac{\pi}{2}$, où M est le milieu de BC. Montrer que la construction est possible si et seulement si $btan\frac{\omega}{2} \leq c < b$. Dans quel cas a-t-on l'égalité?

67)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1994/5) Trouver les fonctions $f :]-1, +\infty[\to]-1, +\infty[$ vérifiant

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x) \quad \forall x, y \in]-1, +\infty[$

(ii) $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

68)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1969/6) Soient $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1y_1 > z_1^2, x_2y_2 > z_2^2$. Montrer que $\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$.

69)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1984/5) Soit d la somme des longueurs des diagonales d'un polygone convexe à $n \geq 4$ côtés. On note p son périmètre. Montrer que

$$\frac{n-3}{2} < \frac{d}{p} < \frac{1}{2}([\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}]-2)$$

.

===

Samedi 02 Février 2008 14h-18h

70)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1961/4) Soient $P_1P_2P_3$ un triangle et P un point à l'intérieur. Les droites PP_1, PP_2, PP_3 coupent les côtés en Q_1, Q_2, Q_3. Montrer que parmi les 3 quotients $PP_1/PQ_1, PP_2/PQ_2, PP_3/PQ_3$ il en existe au moins un qui soit plus petit ou égal à 2 et il en existe au moins deux qui soient plus grand que 2.

71)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1987/4) Existe-t-il une fonction $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(f(n)) = n + 1987$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

72)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1984/1) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tels que $x+y+z = 1$. Montrer que $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

73)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1994/1) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.L'ensemble $\{a_1, ..., a_m\}$ est un sous-ensemble de $\{1, ..., n\}$ tel que si $a_i + a_j \leq n, 1 \leq i \leq j \leq m$ alors $a_i + a_j \in A$. Montrer que $\frac{a_1+...+a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$.

74)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1997/2) Soit ABC un triangle dans lequel $\widehat{BAC}$ est le plus petit angle. Une droite passant par A rencontre le cercle circonscrit au triangle ABC en un point U situé sur l'arc BC opposé à A. Les médiatrices de CA et AB rencontrent AU en V et W. Les droites CV et BW se coupent en T. Montrer que $AU = TB + TC$.

===

Samedi 09 Février 2008 14h-18h

75)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1993/2) Soient A, B, C, D quatre points d'un plan, avec C, D du même côté que la droite AB, tels que $AC.BD = AD.BC$ et $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} + \widehat{ACB}$. Trouver le rapport $\frac{AB.CD}{AC.BD}$ et montrer que les cercles ACD et BCD sont orthogonaux (c'est-à-dire que les tangeantes en un point d'intersection sont perpendiculaires).

76)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1999/6) Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

77)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1982/3) Soient les suites infinies (x_n) de nombres réels tels que $x_0 = 1, \quad x_{i+1} \leq x_i, \quad \forall i \geq 0$. (a) Montrer que pour chacune de ces suites il existe $n \geq 1$ tel que $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + ... + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999$. (b) Trouver une telle suite pour laquelle $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + ... + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$ for tout n.

===

Samedi 16 Février 2008 14h-18h

78)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1987/2) Soit ABC un triangle avec des angles aigus. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en L et le cercle circonscrit en N. Du point L on abaisse les perpendiculaires LK et LM sur les côtés AB et AC. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à l'aire du quadrilatère $AKNM$.

79)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1970/3) Soit $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ...$ une suite de nombres réels. On définit la suite $b_1, b_2, ...$ par $b_n = \sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k})\frac{1}{\sqrt{a_k}}$. Montrer que pour tout $n, \quad 0 \leq b_n < 2$. (b) Etant donné $0 \leq b < 2$ montrer qu'il existe une suite $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ comme ci-dessus pour laquelle $b_n > b$ est vraie pour une infinité de n.

80)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1993/5) Existe-t-il une fonction $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(1) = 2, \quad f(f(n)) = f(n) + n, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

81)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1987/3) Soient $x_1, ..., x_n$ des nombres réels tels que $x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$. Montrer pour tout entier $k \geq 2$ il existe des entiers e_i non tous nuls tels que $|e_i| < k$ et $|e_1x_1 + ... + e_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$.

===

Samedi 23 Février 2008 14h-18h

82)(Olympiades Internationales de Mathématiques 2004/1) Soit ABC un triangle avec des angles aigus et $AB \neq AC$. Le cercle de diamètre BC coupe les côtés AB et AC en M et N. Soit O le milieu de BC. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles cisconscrits aux triangles BMR et CNR ont un point commun situé sur le segment BC.

83)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1990/4) Construire une fonction $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ telle que $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$.

84)(Olympiades Internationales de Mathématiques 1994/3) Pour tout entier $k \geq 1$, on note A_k le sous-ensemble de $\{k+1, k+2, ..., 2k\}$ formés des entiers dont l'écriture en base 2 contient exactement trois 1. Soit $f(k)$ le cardinal de A_k. (a) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, l'équation $f(k) = m$ a au moins une solution. (b) Trouver tous les entiers $m \geq 1$ pour lesquels l'équation $f(k) = m$ a exactement une solution.