PREPARATION AUX OLYMPIADES MATHÉMATIQUES

2007-2008

Organisée par

l'ACADÉMIE DE VERSAILLES

l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

et l'OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TESTS DES VACANCES DE LA TOUSSAINT

Lundi 29 Octobre 2007 9h-12h

1) (Olympiades Internationales de Mathématiques - Liste Courte 1981) Trouver tous les entiers naturels n tels que $2^8 + 2^{11} + 2^n$ soit un carré parfait.

2) (Olympiades Internationales de Mathématiques - Liste Courte 1983) Soit $a > 0$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1|x_1| = x_2|x_2| + (x_1 - a)|x_1 - a| \\ x_2|x_2| = x_3|x_3| + (x_2 - a)|x_2 - a| \\ \qquad \dots \\ x_n|x_n| = x_1|x_1| + (x_n - a)|x_n - a| \end{cases}$$

Lundi 29 Octobre 2007 14h-17h

3)(Olympiades Internationales de Mathématiques - Liste Courte 1992) Montrer que $N = \frac{5^{125}-1}{5^25-1}$ n'est pas un nombre premier.

4)(Olympiades Internationales de Mathématiques - Liste Courte 1985) Trouver le plus petit entier positif n ayant exactement 144 diviseurs positifs distincts dont 10 entiers consécutifs.

Mardi 30 Octobre 2007 9h-12h

5) (Olympiades Internationales de Mathématiques - Liste Courte 1982) Trouver tous les réels a pour lesquels l'équation $16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$ a exactement 4 racines distinctes formant une suite géométrique.

6)(Olympiades Internationales de Mathématiques - Liste Courte 1986) Trouver 4 entiers positifs plus petits que 70000 et ayant chacun plus de 100 diviseurs.

Mardi 30 Octobre 2007 14h-17h

7)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1992) Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients rationnels et α un nombre réel tel que $\alpha^3 - \alpha = f(\alpha)^3 - f(\alpha) = 33^{1992}$. Montrer que pour chaque $n \geq 1$, $(f^{(n)}(\alpha))^3 - f^{(n)}(\alpha) = 33^{1992}$ où $f^{(n)}(\alpha) = f(f(...f(x)))$ et n un entier positif.

8)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1990) Trouver tous les n pour lesquels chaque entier naturel dont la représentation décimale a $n-1$ chiffres 1 et un chiffre 7 est premier.

Mercredi 31 Octobre 2007 9h-12h

9)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1984) Montrer que le produit de 5 entiers consécutifs positifs ne peut pas être le carré d'un entier.

10) (Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1991) Montrer que $\sum_{m=0}^{995} \frac{(-1)^m}{1991-m} \begin{pmatrix} 1991-m \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{1991}$.

Mercredi 31 Octobre 2007 14h-17h

11) (Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1994) Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1^2 & = & ax_2 + 1 \\ x_2^2 & = & ax_3 + 1 \\ \ldots & & \\ x_{999}^2 & = & ax_{1000} + 1 \\ x_{1000}^2 & = & ax_1 + 1 \end{cases}$$

avec $|a| > 1$.

12)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 2004) Pour chaque entier a on suit la procédure suivante pour obtenir l'entier $d(a)$:

1) On déplace le dernier chiffre de a à la première position pour obtenir b.

2) On élève au carré b pour obtenir c.

3) On déplace le premier chiffre de c à la dernière position pour obtenir $d(a)$.

Trouver tous les nombres a tels que $d(a) = a^2$.

Jeudi 1er Novembre 2007 9h-12h

13)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1989) Soient a, b des entiers qui ne sont pas des carrés parfaits. Montrer que si $x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0$ a une solution entière non triviale alors il en est de même pour $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$.

14) (Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1998) Soit a la plus grande racine de $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Montrer que 17 divise $[a^{1788}]$ et $[a^{1988}]$.

Jeudi 1er Novembre 2007 14h-17h

15)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1981) Soit P un polynôme de degré n tel que $P(k) = \binom{n+1}{k}^{-1} \quad k = 0, 1, ..., n$. Déterminer $P(n+1)$.

16)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1979) Trouver tous les réels p tels que l'équation $\sqrt{2p+1-x^2} + \sqrt{3x+p+4} = \sqrt{x^2+9x+3p+9}$ aient exactement 2 racines réelles distinctes.

Vendredi 2 Novembre 2007 9h-12h

17)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1975) Montrer que $x^{m+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{m+j}{j} y^j + y^{n+1} \sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} x^i = 1 \quad m, n = 0, 1, 2...$ si x, y sont des réels tels que $x + y = 1$.

18)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1984) Montrer que:

1) Il existe une infinité de triplets (m, n, p) d'entiers ≥ 1 tels que $4mn - m - n = p^2 - 1$.

2) Il n'existe pas de triplets (m, n, p) d'entiers ≥ 1 tels que $4mn - m - n = p^2$.

Vendredi 2 Novembre 2007 14h-17h

19)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1984) Trouver tous les entiers positifs n tels que $n = d_6^2 + d_7^2 - 1$ où $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ sont tous les diviseurs positifs de n.

20)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1971) On définit $P_0(x) = 2, P_1(x) = x, P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x), n \geq 1$. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 1$ on ait $(x^2 - 4)(P_n^2(x) - 4) = (aP_{n+1}(x) + bP_n(x) + cP_{n-1}(x))^2$.

Samedi 3 Novembre 2007 9h-12h

21)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1971) Existe-t-il des réels a, b, c, t pour lesquels on ait les 3 conditions:

(1) l'équation $ax^2 + btx + c = 0$ a 2 racines réelles distinctes x_1, x_2

(1) l'équation $bx^2 + ctx + a = 0$ a 2 racines réelles distinctes x_2, x_3

(1) l'équation $cx^2 + atx + b = 0$ a 2 racines réelles distinctes x_3, x_1

22)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1981) On définit (a_n) par récurrence en posant $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}$. Trouver une formule explicite pour a_n.

Samedi 3 Novembre 2007 14h-17h

23)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1983) Soit $a > 0$ et (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = (a_n+1)a + (a+1)a_n + 2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)}$. Montrer que a_n est un entier positif pour tout $n \geq 1$.

24)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1993) Soient a, b, c des entiers avec $a > 0, \quad ac - b^2 = P = P_1...P_m$ où $P_1, ..., P_m$ sont des nombres premiers distincts. Soit $M(n)$ le nombre de couples d'entiers (x, y) tels que $ax^2 + 2bxy + cy^2 = n$. Montrer que $M(n)$ est fini et que $M(n) = M(P^k n)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Dimanche 4 Novembre 2007 9h-12h

25)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1968) Trouver les solutions $(x_1, ..., x_n)$ de l'équation $1 + \frac{1}{x_1} + \frac{x_1+1}{x_1x_2} + \frac{(x_1+1)(x_2+1)}{x_1x_2x_3} + \frac{(x_1+1)...(x_{n-1}+1)}{x_1...x_n} = 0$.

26)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1968) On se donne $a_0, a_1, ..., a_k$ des entiers strictement positifs. Trouver tous les entiers strictement positifs y tels que $a_0|y, \quad a_0 + a_1|y + a_1, ..., a_0 + a_n|y + a_n$.

Dimanche 4 Novembre 2007 14h-17h

27)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1975) Calculer la partie entière de $\sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}}$.

28)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1975) Soient a, b, c des entiers et $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. On suppose que l'une des racines de p est égal au produit des deux autres. Montrer que $2p(-1)$ est un multiple de $p(1)+p(-1)-2(1+p(0))$.

Lundi 5 Novembre 2007 9h-12h

29)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1983) Trouver le plus grand entier inférieur ou égal à $\sum_{k=1}^{2^{1983}} k^{\frac{1}{1983}-1}$.

30)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1990) Pour un entier k on note $f_1(k)$ le carré de la somme des chiffres de k et on définit par récurrence $f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$. Déterminer $f_{1991}(2^{1990})$.

Lundi 5 Novembre 2007 14h-17h

31)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1991) Trouver les solutions entières positives x, y, z de l'équation $3^x + 4^y = 5^z$.

32)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1991) On se donne des entiers $a_0, ..., a_{1990}$ et on note $f(x) = x^{1991} + a_{1990}x^{1990} + ... + a_0, \quad g(x) = f^2(x) - 3$. Montrer qu'il y a au plus 1991 racines entières distinctes pour l'équation $g(x) = 0$.

Mardi 6 Novembre 2007 9h-12h

33)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1992) Montrer que pour tout entier positif m il existe une infinité de couples d'entiers (x, y) tels que (i) x, y soient premiers entre eux (ii) y divise $x^2 + m$ (iii) x divise $y^2 + m$.

34)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1993) On dit qu'un entier naturel possède la propriété P si "n divise $a^n - 1$ pour un certain entier a" implique "n^2 divise $a^n - 1$". (a) Montrer que les nombres premiers possèdent la propriété P. (b) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers non premiers qui possède la propriété P.

Mardi 6 Novembre 2007 14h-17h

35)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1994) On définit $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ pour $x \neq 0$. On pose $f^{(0)}(x) = x$ et $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$ pour tout entier positif n et tout $x \neq 0$. Montrer que pour tout entier positif ou nul n et $x \neq -1, 0, 1$: $\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = 1 + \frac{1}{f((\frac{x+1}{x-1})^{2^n})}$.

36)(Olympiades Internationales de Mathématiques-Liste Courte 1995) On se donne $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $ab \geq c^2$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}, \quad x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = b, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = c$.