

Continuous-Wave Modulation (2/2)

- Noise in CW Modulation System
- Noise in Linear Receivers using Coherent Detection
- Noise in AM Receivers using Envelope Detection
- Noise in FM Receivers

2-1/16

Noise in CW Modulation System (1/2)

□ 前言

✿ 考慮通道雜訊

☞ 通道模型：無失真但有附加的白高斯雜訊(AWGN)

✿ 有雜訊的接收器模型

☞ 接收器模型：理想帶通濾波器+理想解調器

□ Signal-to-noise ratios: basic definitions

✿ 一般雜訊功率頻譜密度 $N_0/2$ ，正負頻率皆有

☞ 接收器前端測量得每單位頻寬的平均雜訊功率 N_0

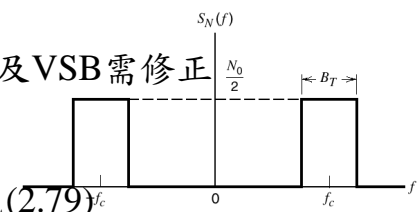
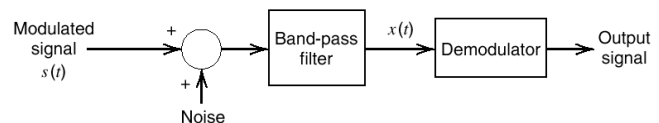
☞ 假設接收器帶通濾波器頻寬同調後訊號的傳輸頻寬 B_T ，且帶中頻率為 f_c

✍ 此適用在AM、DSB-SC及FM，但對SSB及VSB需修正

✍ 經濾波之白雜訊的功率頻譜密度如圖

★ 平均雜訊功率為 $N_0 B_T$

★ 濾過雜訊為窄頻雜訊可表為標準形式(2.79)



Noise in CW Modulation System (2/2)

* 給解調器的濾過訊號為 $x(t)=s(t)+n(t)$

✿ 訊號對雜訊比(SNR, signal-to-noise ratio)

☞ Input (SNR)_I : $s(t)$ 平均功率/ $n(t)$ 平均功率

☞ Output (SNR)_O : 解調後之訊號對雜訊平均功率比

✍ 提供精確性直觀的量測，精確性是指接收器在解調過程中從加有雜訊的調後訊號裡復原訊息訊號的準確度

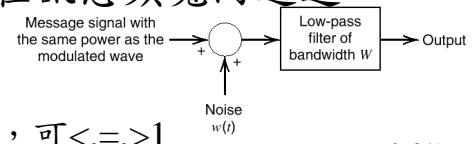
* 需收到的訊息訊號與破壞性的雜訊是相加地出現在解譯器的輸出，相參偵測適用。但在AM的外封偵測及FM的頻率鑑別則需 $n(t)$ 的平均功率夠小

* 可用以比較調變解調系統，但需 $s(t)$ 相同平均功率及通道雜訊在訊息頻寬內所量得的平均功率相同

☞ Channel (SNR)_C : $s(t)$ 平均功率/在訊息頻寬內通道雜訊平均功率

✍ 接收器之優數 = $(SNR)_O / (SNR)_C$

* 愈高表接收器的雜訊效能愈好，可 $<, =, > 1$



2-3/16

Noise in Linear Receivers using Coherent Detection (1/2)

□ 前言

✿ 此節討論linear，下節則nonlinear

✿ 假設相參偵測之同步已達到

□ 優數

$$\text{✿ } (SNR)_{C,DSB-SC} = \frac{C^2 A_c^2 P}{2WN_0}$$

$$\text{☞ } s(t) = CA_c \cos(2\pi f_c t) m(t)$$

✍ C 為系統相依刻度比例因子用以確定 $s(t)$ 與 $n(t)$ 相同單位

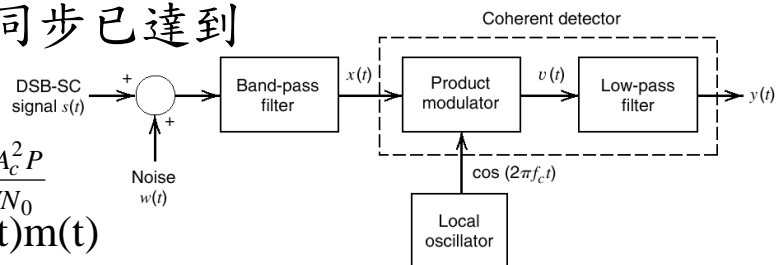
✍ 假設 $M(t)$ 為stationary且均值0，頻寬 W ，功率頻譜密度 $S_M(f)$ ，平均功率 $P = \int_{-W}^W S_M(f) df$ ，則調後波之平均功率為 $C^2 A_c^2 P / 2$

✍ 雜訊功率為 WN_0 ，可得 $(SNR)_{C,DSB-SC}$ ，其中 C^2 用以使其無單位

$$\text{✿ } (SNR)_{O,DSB-SC} = \frac{C^2 A_c^2 P}{2WN_0}$$

$$v(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) = [CA_c \cos(2\pi f_c t) m(t) + n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)] \cos(2\pi f_c t) \\ = \frac{1}{2} CA_c m(t) + \frac{1}{2} n_I(t) + \frac{1}{2} [CA_c m(t) + \frac{1}{2} n_I(t)] \cos(4\pi f_c t) - \frac{1}{2} n_Q(t) \sin(4\pi f_c t)$$

2-4/16



Noise in Linear Receivers using Coherent Detection (2/2)

☞ $y(t) = \frac{1}{2} C A_c m(t) + \frac{1}{2} n_I(t)$

- ✍ $m(t)$ 及 $n_I(t)$ 相加地出現在接收器輸出； $n_Q(t)$ 完全被相參偵測器拒絕
- ✍ 相參偵測區別於其他解調技術的重要特性：輸出訊息成份未毀壞，雜訊成份與訊息相加地出現，無關於 $(SNR)_I$

☞ 訊息訊號成份之平均功率為 $C^2 A_c^2 P / 4$ 。因 $n_I(t)$ 與 $n(t)$ 之平均功率相同 $=2WN_0$ ，所以雜訊成份平均功率為 $WN_0 / 2$

☞ 得 $(SNR)_{O,DSB-SC}$ ，則優數 $=1$ 。SSB同法得相同優數

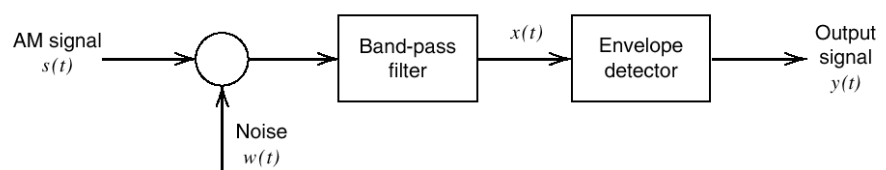
□ 結論：相參SSB接收器 vs. 相參DSB-SC接收器

- ✍ 平均傳輸功率及訊號頻寬內平均雜訊功率相同下，具相同 $(SNR)_O$
- ✍ 兩者雜訊效能與在相同通道雜訊單純送訊息訊號一樣調變僅轉變訊息至不同頻帶以便利在帶通通道上傳送
- ✍ DSB-SC及SSB均無法提供改進雜訊效能與增加通道頻寬之間的交易

2-5/16

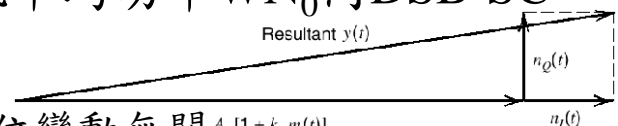
Noise in AM Receivers using Envelope Detection (1/3)

□ 前言



✍ $(SNR)_{C,AM} = \frac{A_c^2(1+k_a^2P)}{2WN_0}$: $s(t) = A_c[1+k_a m(t)]\cos(2\pi f_c t)$ 平均功率為 $A_c^2(1+k_a^2P)/2$ ，雜訊平均功率 WN_0 同DSB-SC

✍ $(SNR)_{O,AM} \approx \frac{A_c^2 k_a^2 P}{2WN_0}$



☞ 外封偵測器的輸出與相位變動無關 $A_c[1+k_a m(t)]$

$$x(t) = [A_c + A_c k_a m(t) + n_I(t)]\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \Rightarrow y(t) = \{[A_c + A_c k_a m(t) + n_I(t)]^2 + n_Q^2(t)\}^{1/2}$$

☞ 將其近似成訊息項加一雜訊導致項

✍ 當載波平均功率之於雜訊平均功率很大時， $A_c[1+k_a m(t)]$ 之於 $n_I(t)$ 及 $n_Q(t)$ 在大部分時間皆很大，則 $y(t) \approx A_c + A_c k_a m(t) + n_I(t)$

☞ 直流成份 A_c 可用電容濾去，則得 $(SNR)_{O,AM}$

2-6/16

Noise in AM Receivers using Envelope Detection (2/3)

✍ 需在外封偵測器輸入之雜訊平均功率之於載波平均功率夠小

✍ $k_a \leq 100\%$

✿ $\frac{(SNR)_O}{(SNR)_C} \Big|_{AM} \approx \frac{k_a^2 P}{1 + k_a^2 P}$: 雜訊效能比DSB-SC差，因浪費功率在傳輸載波

□ Example 2.4: Single-tone modulation

✿ $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ 則 $P = A_m^2 / 2$

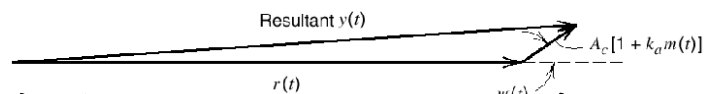
✍ $s(t) = A_c [1 + \mu \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_c t)$, $\mu = k_a A_m$ 為調變因子

✍ 優數 $\frac{(SNR)_O}{(SNR)_C} \Big|_{AM} \approx \frac{\frac{1}{2} k_a^2 A_m^2}{1 + \frac{1}{2} k_a^2 A_m^2} = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$

✍ $\mu = 1$ 時為100%調變，得優數為1/3，表示在其他因子相同時，AM需使用3倍的平均功率才可得與DSB-SC相同的雜訊效能

2-7/16

Noise in AM Receivers using Envelope Detection (3/3)



□ Threshold effect : 當載波對雜訊比較小時

✿ 雜訊主導 : $n(t) = r(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$

✍ $y(t) \approx r(t) + A_c \cos[\psi(t)] + A_c k_a m(t) \cos[\psi(t)]$

✍ 偵測器輸出無嚴格正比於 $m(t)$ 的成份，只含 $m(t)$ 乘上雜訊相關項 $\cos(\psi(t))$ ， $\psi(t)$ 為均勻分配，所以在偵測器的輸出中完全漏失了 $m(t)$ 的資訊

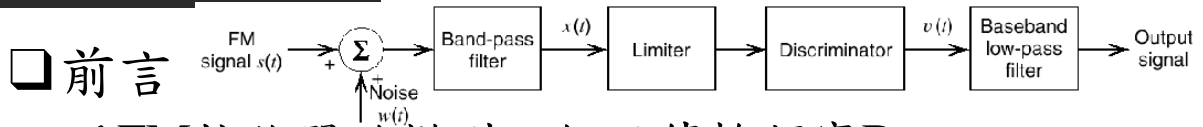
✿ 門檻效應：指運作在低載波對雜訊比的外封偵測器中訊息的漏失

✍ 門檻：一載波對雜訊比值，低於此值則偵測器的雜訊效能惡化相當快速

✍ 只發生在非線性偵測器(如外封偵器)，不會在相參偵測器

2-8/16

Noise in FM Receivers (1/8)



⊗ FM接收器的模型：假設傳輸頻寬 B_T

☞ 限制器：調頻之訊號應振幅不變

✍ 振幅限制器：藉由箝制濾波器輸出之調後波而移去振幅變動

✍ 帶通濾波器：將結果之方形波圓滑化，因而抑制載波之諧波。輸出再為弦波，其振幅與輸入時振幅不相依

☞ 鑑別器

✍ 斜率網路或微分器：頻率響應為純虛數，隨頻率線性改變，產生混合調後波，振幅頻率皆隨訊息訊號改變

✍ 外封偵測器：復元振幅變動再生訊息訊號

☞ 後偵測濾波器：基帶低通濾波器

✍ 頻寬只夠大到容許訊息訊號的最高頻率。可移去鑑別器輸出雜訊中帶外成份，使雜訊影響保持最小

2-9/16

Noise in FM Receivers (2/8)

⊗ 優數

☞ 求 $x(t)$ 之相位 $\theta(t)$

✍ 外封不需要，且變動會被限制器移除

✍ 濾過雜訊及進入的FM訊號以外封及相位表示

$$x(t) = s(t) + n(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + r(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)], \phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

✍ 如圖得 $\theta(t) = \phi(t) + \tan^{-1} \left\{ \frac{r(t) \sin[\psi(t) - \phi(t)]}{A_c + r(t) \cos[\psi(t) - \phi(t)]} \right\}$

☞ $n(t)$ 在瞬間頻率導致的誤差

✍ 鑑別器的輸出與頻率成正比 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\theta'(t)}{2\pi}$

✍ 當在鑑別器輸入時之載波對雜訊比夠大時，可簡化近似

$$\theta(t) \approx \phi(t) + \frac{r(t)}{A_c} \sin[\psi(t) - \phi(t)] = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau + \frac{r(t)}{A_c} \sin[\psi(t) - \phi(t)]$$

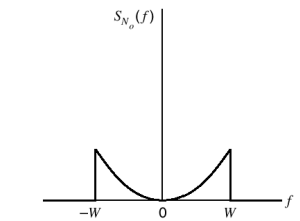
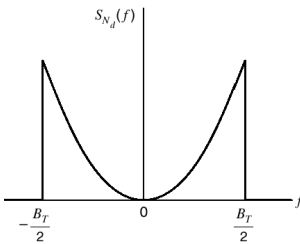
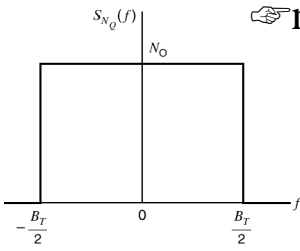
$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = k_f m(t) + n_d(t) \approx k_f m(t) + \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d}{dt} \{r(t) \sin[\psi(t) - \phi(t)]\}$$

* 鑑別器輸出含 $m(t)$ 乘上常數 k_f 加額外的雜訊成份 $n_d(t)$

2-10/16

Noise in FM Receivers (3/8)

$n_d(t)$ 之分析



$\psi(t)$ 均勻分佈則 $\psi(t)-\phi(t)$ 亦均勻分佈(當載波對雜訊比夠大時), 則 $n_d(t)$ 與調變訊號無關, 只依載波及窄頻雜訊特性

$$n_d(t) \approx \frac{1}{2\pi A_c} \frac{d}{dt} \{r(t) \sin[\psi(t)]\} = \frac{1}{2\pi A_c} \frac{dn_Q(t)}{dt}$$

* $n_d(t)$ 實際上由 A_c 及 $n_Q(t)$ 決定

$\nearrow n_d(t)$ 實為 $n_Q(t)$ 經一線性濾波器, 其頻率響應為 $\frac{j2\pi f}{2\pi A_c} = \frac{jf}{A_c}$

* $n_Q(t)$ 的功率頻譜密度可由 $n(t)$ 得如圖, 則可得

$$S_{N_d}(f) = \frac{f^2}{A_c^2} S_{N_Q}(f) = \frac{N_0 f^2}{A_c^2}, |f| \leq \frac{B_T}{2}; 0, \text{ otherwise}$$

* 寬頻 FM 時 $W \leq B_T/2$, 則帶外雜訊會濾掉, 得

$$S_{N_d}(f) = \frac{N_0 f^2}{A_c^2}, |f| \leq W; 0, \text{ otherwise}$$

* 所以輸出雜訊平均功率為 $\frac{2N_0 W^3}{3A_c^2}$, 與載波功率 $A_c^2/2$ 成反比, 所以增加載波功率有雜訊安靜作用

2-11/16

Noise in FM Receivers (4/8)

$$\frac{(SNR)_o}{(SNR)_c} \Big|_{FM} = \frac{3k_f^2 P}{W^2}$$

\nearrow 平均輸出訊號功率為 $k_f^2 P$, 得 $(SNR)_{o,FM} = \frac{3A_c^2 k_f^2 P}{2N_0 W^3}$

\nearrow 訊息頻寬內的平均雜訊功率 WN_0 , $s(t)$ 平均功率 $A_c^2/2$

得 $(SNR)_{c,FM} = A_c^2/(2WN_0)$, 所以可得優數

\nearrow 對寬頻 FM $B_T \propto D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{k_f A_m}{W} \Rightarrow B_T \propto \frac{k_f P^{1/2}}{W} \propto \sqrt{\text{figure of merit}}$

* 優數為偏移比率之二次方程式

結論

\nearrow 當載波對雜訊比夠高時, 增加傳輸頻寬提供在輸出 SNR 或優數一相應的二次方增加

\nearrow 與調幅不同, 在調頻, 有一實際機制可交換增加傳輸頻寬以改進雜訊效能

2-12/16

Noise in FM Receivers (5/8)

Example 2.5: Single-tone modulation

✿ 弦波 $m(t)$ 之頻率 f_m ，最大頻率偏移 Δf

✿ $m(t)$ 之平均功率 $P = \frac{A_m^2}{2} = \frac{(\Delta f / k_f)^2}{2} = \frac{(\Delta f)^2}{2k_f^2}$

✿ 可得 $(SNR)_{O,FM}$ 及 $\frac{(SNR)_O}{(SNR)_C}|_{FM} = \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta f}{W} \right)^2 = \frac{3}{2} \beta^2$

* β 由 W 決定而非 f_m

✿ 與 AM 之比較：AM 之優數為 1/3 (Ex 2.4)

✿ FM 可得較好之雜訊效能，當 $\frac{3}{2} \beta^2 > \frac{1}{3}$, or $\beta > 0.471$

* $\beta=0.5$ 約略定出窄頻 FM 與寬頻 FM 之轉捩點

Capture effect

✿ 除雜訊外，尚有鄰近載波頻率所產生的干擾

✿ 干擾抑制只在干擾比想要的輸入弱時才能正常運作

✿ 接收器會鎖住較強的(干擾)訊號，而壓抑真正的輸入。若強度接近則在兩者間切換

2-13/16

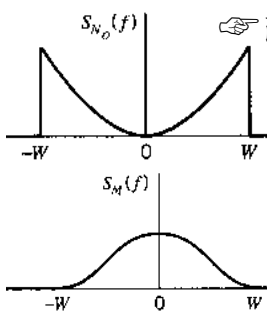
Noise in FM Receivers (6/8)

Pre-emphasis and de-emphasis in FM

✿ 雜訊在接收器輸出之功率頻譜密度有 square-law

✿ 一般訊號之功率頻譜密度則中間高兩邊低

✿ 改進雜訊效能的方法



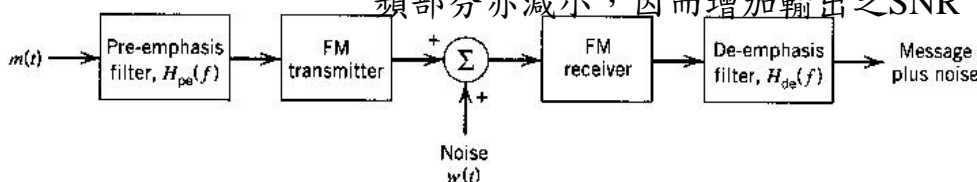
✿ 減小後偵測低通濾波器之頻寬以拒絕大量雜訊功率

* 亦損失小量訊息功率，但有時卻不可容忍，如音樂

✿ 在傳送器使用預先強調及在接收器使用解強調

* 在調變前即在雜訊加入前，刻意強調訊號的高頻部分，即訊號之功率頻譜密度被等化以佔滿分配頻帶

* 接收器則執行相反運作以解強調高頻部分，所以雜訊高頻部分亦減小，因而增加輸出之 SNR



2-14/16

Noise in FM Receivers (7/8)

⊗ 輸出SNR的改進

☞ 為得未失真的原訊息，傳送器的預先強調濾波器及接收器的解強調濾波器之頻率響應需互為相反

$$\nearrow H_{de}(f) = 1/H_{pe}(f), \quad -W \leq f \leq W \quad |H_{de}(f)|^2 S_{N_d}(f) = \begin{cases} \frac{N_0 f^2}{A_c^2} |H_{de}(f)|^2, & |f| \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

☞ 因 $W < B_T/2$ ，所以解強調的平均雜訊功率 $\frac{N_0}{A_c^2} \int_{-W}^W f^2 |H_{de}(f)|^2 df$

☞ 接收器輸出的平均訊息功率未受影響，所以輸出SNR的改進定義為 $I = \frac{\text{無預強調及解強調之平均輸出雜訊功率}}{\text{有預強調及解強調之平均輸出雜訊功率}}$

★ 得(2.160)，此為假設高CNR的條件下

2-15/16

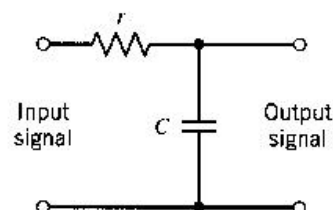
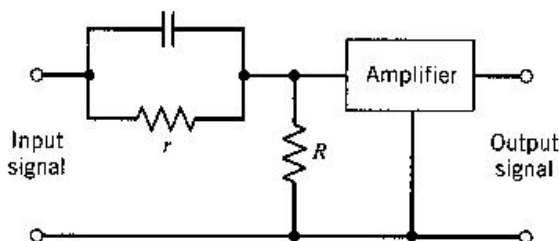
Noise in FM Receivers (8/8)

□ Example 2.6

⊗ $H_{pe}(f) = 1 + jf/f_0$ ， $f_0 = 1/(2\pi Cr)$ ，當 $R \ll r$ ， $f/f_0 \ll 1$

☞ 可得(2.161)

☞ $f_0 = 2.1 \text{ kHz}$ ， $W = 15 \text{ kHz}$ ，則 $I = 22 = 13 \text{ dB}$



2-16/16