Completude e incompletude dos sistemas modais normais

Samir Gorsky

22 de maio de 2006

Resumo

Uma pequena apresentação da completude e incompletude dos sistemas modais normais. Baseado no livro de Carnielli e Pizzi: *Modalitá e Multimodalitá*.

Estrutura da apresentação

1) Acompletude contrutiva de K e KT.

2) A completude com o método de Henkin.

3) A completude com respito a modelos e a completude com respeito a estruturas (enquadramentos).

4) A lógica da demonstrabilidade aritmética.

5) Um resultado de incompletude.

6) A propriedade do modelo finito e o método de filtração

1 A completude Construtiva de K e KT (ou T)

$\mathbf{C} \models A$ (indica que A é válida em todas as estruturas relacionais de uma certa classe $\mathbf{C}$.

<u>Correção:</u>

Para qualquer fbf expressa na linguagem de um arbitrário sistema S.

$\vdash_S A$ somente se $\mathbf{C} \models A$

$\vdash_S A \Rightarrow \mathbf{C} \models A$

Completude:

Para qualquer fbf expressa na linguagem de um arbitrário sistema S.

$\mathbf{C} \models A$ somente se $\vdash_S A$

$\mathbf{C} \models A \Rightarrow \vdash_S A$

(S é completa com respeito a classe de estruturas **C**

A correção ou completude com relação a uma classe de estrutura **C** implica (ou equivale?) a correção ou completude (respectivamente) com respeito a classe de modelos baseado em tal estrutura.

A correção ou completude com respeito a uma classe de modelos **M** não implica a correção ou completude (respectivamente) com respeito às estruturas sob as quais são baseados os modelos de **M**.

Definição: (Demostração construtiva da completude)

Uma demonstração de completude para um sistema S se diz construtiva quando mostra como transformar uma prova de S-validade de qualquer fórmula A em uma demonstração sintática de A em S.

K, T, S4 e S5 possuem uma demonstração construtiva de completude.

Demonstração construtiva de completude para o sistema base K

2 A lógica da demonstrabilidade aritmética

A parte o axioma K, os axiomas característicos da lógica modal (T, D, S4, S5) resultam todos de casos particulares de um único esquema que chamamos de $G\infty$.

$G\infty$: $\Diamond^k \Box^l A \rightarrow \Box^m \Diamond^n A (k, l, m, n \geq 0)$

GL: $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

GL não pertence ao esquema $G\infty$.

(1933 - Gödel) A lógica da demonstrabilidade aritmética.

$\Box A$ (é demonstrável na arotmética de Peano que A)

$\Diamond A$ (é consistente com a aritmética de peano que A)

Com esta interpretação, os sistemas de Lewis tão fortes quanto T (KT) seriam inaceitáveis.

Na (dentro da) aritmética de Peano é demonstrável a consistência de qualquer verdade aritmética (no próprio sistema). Isto contradiz os resultados do próprio Gödel. Daí que, T ($\Box p \rightarrow p$) não pode ser aceito junto com a regra de necessitação em um sistema que pretenda axiomatizar a demonstrabilidade aritmética.

Se T ($\Box p \rightarrow p$) é teorema (demonstrável), ou seja, $\Box(\Box p \rightarrow p)$ então uma contradição é demonstrável e portanto p é demonstrável para qualquer p (daí $\Box p$).

Em fórmula: $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$

Portanto esta fórmula deve substituir T em um sistema que pretenda axiomatizar a demonstrabilidade aritmética. GL é uma referência a Gödel-Löb.

Definição: (e-trsformada)

Chamamos de e-transformada de A a fórmula A' que se obtém de A eliminando todos os operadores modais.

Para todos os sistmas $K + G\infty$ as e-transformadas dos axiomas são PC-válidas e as regras de inferência conservam esta propriedade.

Vale ainda para o sistema diodoréio D1:

D1: $\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$

A e-transformada de GL não é PC-válida.

$(p \rightarrow p) \rightarrow p$ equivale a p.

Não se demonstra a consistência deste sistema pela redução a PC-fórmulas. (precisa-se, portanto, de outro método).

Proposição (3.13): $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ é um teorema de KGL.

A fórmula $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ caracteriza a transitividade de um sistema. Segue-se então que KGL é transitivo.

Definição: (R é bem coberta)

Uma relação R sobre W é *bem coberta* se não existe sequência infinita de pontos de W (x, y, z,...) tal que xRyRz..., ou em outras palavras, todo subconjunto W'de W possui um elemento R-maximal, isto é, não acessa nehum elemento de W'.

A sequência infinita não é exprimível mediante quantificadores de primeira ordem. Portanto a boa cobertura não é definível em primeira ordem.

Seja R uma relação de acessibilidade que é:

a) Transitiva b) Bem coberta

Proposição (3.14):

a) Todo teorema de KGL é válido em toda estrutura transitiva transitiva e bem coberta.

b) Toda estrutura para KGL é transitiva e bem coberta.

Proposição 3.15: Se F é uma estrutura finita ¡W, R¿, R é irreflexiva, transitiva e bem coberta.

Demonstração:

Se W é finito e R é uma relação transitiva sobre W, então, se R é bem coberta, R é irreflexiva. Com efeito, se R não fosse irreflexiva, haveria ao menos um x tal que xRxRx.... daí que R não é bem coberta.

Suponha agora que R não seja bem coberta, então em tal caso existe uma sequência infinita x,y,z,... de elementos de W tais que xRyRz... dado que R é uma relação sobre o conjunto finito W, a sequência deverá conter um mesmo ponto x ao menos duas vezes (...xRy...Rx...) e, dado que R é transitiva, teremos xRx. Mas daí R não é irreflexiva.

Definição: (Ordem parcial estrita).

O enquadramento ¡W, R¿ no qual W é infinita e R é irreflexiva e transitiva é chamado de ordem parcial estrita.

Todo modelo finito transitivo e bem coberto é uma ordem parcial estrita.

O ssistema KGL é completo com respeito à classe das ordens parciais estritas, e portanto dos modelos finitos, transitivos e bem cobertos.

Completude de KGL $\Rightarrow$ Técnica: propriedade do modelo finito.

Definição: (submodelo)

Um modelo M' = (W', R', V') é um submodelo de M = (W, R, V) sse $W' \subseteq W$, R' é a restrição de R a W' e V = V' para todo $x \in W$.

Definição: (subestrutura)

Uma estrutura F'=(W', R') é uma subestrutura de F=(W, R) sse algum modelo construido sob F é um submodelo de algum modelo construído sob F.

Definição: (propriedade sintática da disjunção)

Se $A_0, ..., A_n$ são fórmulas tais que $\vdash_S \Box A_0 \vee ... \vee \Box A_n$, então existe algum i menor que n tal que $\vdash_S A_i$. Dizemos que S tem a propriedade sintática da disjunção.

Definição: (propriedade semântica da disjunção)

Se $A_0, ..., A_n$ são fórmulas tais que $\vDash_S \Box A_0 \vee ... \vee \Box A_n$, então existe algum i menor que n tal que $\vDash_S A_i$. Dizemos que S tem a propriedade semântica da disjunção.

Definição: (estrutura gerada)

Uma estrutura (W, R) é gerada se existe algum $x \in W$ (mundo gerador) relacionado com todos os outros mundos y de uma cadeia finita ordenada por R, isto é, $xR^n y$ para algum $n \geq 1$.

Definição: (estrutura fortemente gerada)

Uma estrutura (W, R) é fortemente gerada se existe um $x \in W$ tal que, para todo $y \in W$, xRy (isto é, existe um mundo que vê todos os mundos, inclusive si mesmo).

Definição: (Conectados)

Se xRy ou yRx diremos que x e y são conectados entre si.

Definição: (estrutura coesiva)

uma estrutura é coesiva quando todo mundo x da estrutura é conectado em um número finito de passos a qualquer mundo y da mesma estrutura.

Proposição 3.16: O modelo canônico de qualquer lógica S que seja consistente e dotada da propriedade sintática da disjunção é fortemente gerado.

Propozição 3.17: O modelo canônico de qualquer lógica S que seja consistente e dotada da propriedade semântica da disjunção é fortemonte gerado.

Corolário 3.18: A estrutura canônica de qualquer lógica S que seja consistente e dotada da propriedade sintática da disjunção é fortemente gerada.

Corolário 3.19: A estrutura canônica de qualquer lógica S que seja consistente e dotada da propriedade sintática da disjunção é fortemente gerada.

Lema 3.20: Seja M = (W, R, V) um modelo qualquer e M' = (W', R', V') um submodelo gerado qualquer de M. Então, para todo A e todo $x \in W'$, v(A, x) = v'(A, x).

Proposição 3.21: A lógica KGL tem a propriedade semântica da disjunção.

Corolário 3.22: A estrutura canônica de KGL é fortemente gerada.

Corolário 3.23: A lógica KGL não é canônica.