Raíces cuadrada y cúbica a mano

Jorge Alonso*

Vigo, 06/2005 — v1.1.0
aparecido inicialmente en *Tio Petros***

Índice

1. Introducción

En la escuela me enseñaron a extraer raíces cuadradas manualmente. A mi padre, también le enseñaron a extraer las raíces cúbicas. A ninguno de los dos nos explicaron por qué funcionaban ambos algoritmos.

2. Raíz cuadrada

Vamos a ver cómo extraer la raíz cuadrada de un número, y lo haremos a través de unos ejemplos.

2.1. Raíz de 2911

Queremos hallar la raíz cuadrada de 2911. ¿Cómo podríamos hacer?

Para empezar, ¿cuántos dígitos tendrá su raíz? El número más pequeño con dos dígitos es 10, y su cuadrado es 100; 2911 es mayor que 100, por lo que tendrá, al menos, dos dígitos. El número más pequeño con tres dígitos es 100, y $100^2 = 10000 > 2911$. En conclusión, la raíz es de dos dígitos, que podemos escribir como $10a+b$.

¿Es 2911 un cuadrado perfecto? No lo sabemos, pero podemos suponer que no lo será, con lo que podemos escribir

$$2911 = (10a+b)^2 + r$$

Al final, si es un cuadrado perfecto, obtendremos $r = 0$. ¿Cuántos dígitos tendrá r? Quizás uno, quizás dos; no podemos decirlo.

Expandimos el cuadrado de la expresión anterior

$$2911 = 100a^2 + 20ab + b^2 + r$$

y vemos que 2911 tiene como sumando principal a $100a^2$, lo que nos lleva a pensar que

$$a^2 \approx \frac{2911}{100} \approx 29$$

deduciendo que $a = 5$.

Entonces, $2911 - 100a^2 = 2911 - 2500 = 411$.

El siguiente paso será hallar b. Hasta ahora tenemos que

$$411 = 20ab + b^2 + r$$

y podemos estimar el valor de b dividiendo la igualdad anterior por $20a$:

$$\frac{411}{20a} = \frac{20ab + b^2 + r}{20a} = b + \frac{b^2 + r}{20a} \approx b$$

Así que:

$$b \approx \frac{411}{20 \cdot 5} \approx 4$$

Probamos este valor de b en

$$411 = 20ab + b^2 + r = b(20a+b) + r$$

*Mi correo es `soidsenatas@yahoo.es`, y mi página web es `http://es.geocities.com/soidsenatas/`.

**`http://tiopetrus.blogia.com`

obteniendo

$$411 = 4(20 \cdot 5 + 4) + r = 416 + r$$

que nos lleva a que r tiene valor negativo, lo que no puede ser. Entonces b no puede valer 4; veamos con $b = 3$:

$$411 = 3(20 \cdot 5 + 3) + r = 309 + r$$

¡Lo hemos logrado! El valor de b es 3, y el de r es $411 - 309 = 102$:

$$2911 = (10a + b)^2 + r = 53^2 + 102$$

Todo este procedimiento suele escribirse en una forma más compacta, conocida por todos:

$$\begin{array}{r|l}
29\,11 & 53 \\ \hline
-25 & 10\,4 \times 4 = 416 \text{ no} \\
4\,11 & 10\,3 \times 3 = 309 \\
-3\,09 & \\
1\,02 &
\end{array}$$

2.2. Raíz de 291134

En base al conocimiento anterior, vamos a calcular la raíz cuadrada de 291134.

De forma análoga, deducimos que el número de cifras de la raíz es tres. Exprésémoslo igual que antes, pero ahora con a representando un número de *dos* cifras:

$$291134 = (10a + b)^2 + r = 100a^2 + 20ab + b^2 + r$$

Al igual que antes vemos que 291134 tiene como sumando principal a $100a^2$, lo que nos lleva a

$$a^2 \approx \frac{291134}{100} \approx 2911$$

es decir, $a = 53$ como ya averiguamos en los pasos anteriores.

Para b, aplicamos justamente el mismo método que antes, lo que nos lleva a:

$$\begin{array}{r|l}
29\,11\,34 & 53\,9 \\ \hline
-28\,09 & 106\,9 \times 9 = 9621 \\
1\,02\,34 & \\
-\,96\,21 & \\
6\,13 &
\end{array}$$

En general, como no conoceríamos la raíz cuadrada de 2911, haríamos el procedimiento al completo:

$$\begin{array}{r|l}
29\,11\,34 & 539 \\ \hline
-25 & 10\,4 \times 4 = 416 \text{ no} \\
4\,11 & 10\,3 \times 3 = 309 \\ \hline
-3\,09 & 106\,9 \times 9 = 9621 \\
1\,02\,34 & \\
-\,96\,21 & \\
6\,13 &
\end{array}$$

En conclusión:

$$291134 = 539^2 + 613$$

2.3. Raíz de 2911,34

Y ¿cuál es la raíz cuadrada de 2911,34?

Podemos escribir

$$\sqrt{2911,34} = \sqrt{\frac{291134}{100}} = \frac{\sqrt{291134}}{10}$$

con lo que

$$2911,34 = 53,9^2 + 6,13$$

Esto no es ni más ni menos que aplicar el procedimiento conocido, teniendo presente la posición de la coma decimal:

$$\begin{array}{r|l}
29\,11{,}34 & 53{,}9 \\ \hline
-25 & 10\,4 \times 4 = 416 \text{ no} \\
4\,11 & 10\,3 \times 3 = 309 \\ \hline
-3\,09 & 106\,9 \times 9 = 9621 \\
1\,02\;34 & \\
-\,96\;21 & \\
6\;13 &
\end{array}$$

2.4. Raíz de 29113

En este caso la raíz tiene tres dígitos, pero al buscar el valor de a nos encontramos con que

$$a^2 \approx \frac{29113}{100} \approx 291$$

con lo que no nos sirve lo calculado hasta ahora. Hay que aplicar todo el procedimiento desde el principio:

$$\begin{array}{r|l}
2\,91\,13 & 170 \\ \hline
-1 & 2\,9 \times 9 = 261 \text{ no} \\
1\,91 & 2\,8 \times 8 = 224 \text{ no} \\
-1\,89 & 2\,7 \times 7 = 189 \\ \hline
2\,13 & 34\,0 \times 0 = 0 \\
-\,0 & \\
2\,13 &
\end{array}$$

2.5. En conclusión

Como se puede observar, el número de dígitos de la raíz es igual a la mitad del número de dígitos del radicando, *redondeando hacia arriba*. Para esto, dividimos el radicando en grupos de dos cifras, empezando por la derecha. Después, hallamos la raíz cuadrada del primer grupo (de la izquierda), que será el valor a. A partir de entonces se aplica siempre el mismo método de hallar b con cada nuevo grupo. Para los decimales de la raíz, se bajan grupos de dos ceros en el radicando.

3. Raíz cúbica

3.1. Raíz de 17580

El método a seguir es análogo al que empleamos con la raíz cuadrada.

¿Cuántos dígitos tiene la raíz cúbica de 17580? Como $10^3 = 1000$ y $100^3 = 1000000$, deducimos que son dos:

$$(10a+b)^3 + r = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + r$$

Vemos que $17580 \approx 1000a^3$, esto es, $a^3 \approx 17$, con lo que a vale 2.

Restando el valor de $1000a^3$, nos queda

$$9580 = 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + r$$

Para estimar el valor de b, dividimos entre $300a^2$:

$$\frac{9580}{300a^2} = b + \frac{30ab^2 + b^3 + r}{300a^2} \approx b$$

obteniendo $b = 7$.

Probamos este valor de b:

$$9580 = 300 \cdot 2^2 \cdot 7 + 30 \cdot 2 \cdot 7^2 + 7^3 + r = 11683 + r$$

que no sirve, por lo que pasamos a $b = 6$:

$$9580 = 300 \cdot 2^2 \cdot 6 + 30 \cdot 2 \cdot 6^2 + 6^3 + r = 9576 + r$$

¡Conseguido!:

$$17580 = 26^3 + 4$$

Expresándolo de forma compacta, se ve así:

17 580	26
- 8	$300 \times 2^2 \times 7 =$ 8400
9 580	$30 \times 2 \times 7^2 =$ 2940
- 9 576	$7^3 =$ 343
4	11683 no
	$300 \times 2^2 \times 6 =$ 7200
	$30 \times 2 \times 6^2 =$ 2160
	$6^3 =$ 216
	9576

3.2. Raíz de 21049,5

Por último, veamos otra raíz cúbica, en la que además se han extraído dos decimales:

21 049 ,5	27,61
- 8	$300 \times 2^2 \times 7 =$ 8400
13 049	$30 \times 2 \times 7^2 =$ 2940
-11 683	$7^3 =$ 343
1 366 500	11683
- 1 341 576	$300 \times 27^2 \times 6 =$ 1312200
24 924 000	$30 \times 27 \times 6^2 =$ 29160
- 22 861 081	$6^3 =$ 216
2 062 919	1341576
	$300 \times 276^2 \times 1 =$ 22852800
	$30 \times 276 \times 1^2 =$ 8280
	$1^3 =$ 1
	22861081

$$21049,5 = 27,61^3 + 2,062919$$

3.3. En conclusión

La raíz cúbica se calcula de forma similar a la cuadrada, pero separando los dígitos del radicando en grupos de tres cifras.