GUIA: LIMITES - CONTINUIDAD

1.- Sea $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$, complete la siguiente tabla :

X	1	0.1	0.01	0.001	-1	-0.01	-0.001
f(x)							

De acuerdo con la tabla ¿ es posible que exista $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?
De ser así de un valor estimativo.

2.- Dado que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1$

Analizar :

a) $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) + g(x) \,]$

b) $\operatorname{Lim}\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$

c) $\operatorname{Lim}\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{|f(x)|}$

d) $\operatorname{Lim}\limits_{x \to \infty} f(x) \bullet g(x)$

3.- Sean $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$

Analizar :

a) $\operatorname{Lim}\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

b) $\operatorname{Lim}\limits_{x \to \infty} f(X)\, g(x)$

c) $\operatorname{Lim}\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - 1 \,]\, g(x)$

4.- Sea $f(x) = 3x$

a) Encuentre un número D tal que para $x > D$, se deduce que $f(x) > 600$

b) Encuentre otro número D tal que para $x > D$ se deduce que $f(x) > 600$

c) ¿Cuál es el número más pequeño D tal que para $x>D$ se deduce que $f(x) > 600$.

5.- Use la definición de límite para demostrar que :

a) $\lim_{x \to 2} (3x + 5) = 11$

b) $\lim_{x \to 3} x^2 + 2x - 3 = 12$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{12}{x+1} = 4$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4}{x} = -3$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x-1} = 4$

6.- Demuestre que si $0 < \delta < 1$ y $|x-3| < \delta$ entonces $|x^2 - 9| < 7\delta$

7.- Sean $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $b_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

Pruebe que $\lim_{x \to \infty} a_n b_n = 1$

8.- $\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$ $\lim_{t \to \infty} g(t) = \infty$ $\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 3$

Calcule $\lim_{t \to \infty} \frac{\text{Ln } f(t)}{\text{Ln } g(t)}$

9 .- Determine los valores de K en R de modo que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x + k^2 - 6}{x^2 + x} = 3$$

LIMITES ALGEBRAICOS: Son límites de funciones algebraicas, cuyas indeter-Minaciones se resuelven mediante factorización, desarrollando cuadrados, racio-Nalizando los radicales, usando variables auxiliares, cuando corresponda

1.- $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$ R : $\dfrac{-1}{6}$

2.- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ R : $\dfrac{5}{3}$

3.- $\lim_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$ R : $\dfrac{-1}{3}$

4.- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1 + x}\right) - 1}{\left(\sqrt[3]{1 + x}\right) - 1}$ R : $\dfrac{3}{2}$

5.- $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x - 2}}{2x - \sqrt{5x + 6}}$ R : $\dfrac{2}{11}$

6.- $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x)} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x)} - \sqrt[5]{x}}$ R: $\dfrac{15}{8}$

7.- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{2m} - 2x^{m} + 1}{x^{2n} - 2x^{n} + 1}$ R : $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$

8.- $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt[n]{x}}$ R : n

9.- $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3 + 0.5^{x}}{0.3^{x+1} + 5}$ R : $\dfrac{3}{5}$

10.- $\lim_{x \to \infty} \dfrac{9 + \dfrac{x}{x + 1}}{2 + \dfrac{1}{x}}$ R : 5

11.- $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$ R : $\dfrac{a - 1}{3a^2}$

12.- $\lim_{x \to 2} \dfrac{\left(x^2 - x - 2\right)^{20}}{\left(x^3 - 12x + 6\right)^{10}}$ R : $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

Para resolver límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ es conveniente dividir numerador y denominador por la potencia de mayor grado. Calcular :

1.- $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2+5x+1}{7x^3+1}$ R: 0

2.- $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$ R : 0

3.- $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1+x}}$ R: 0

4.- $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x^3+1)^6}{(3x^9-1)^2}$ R: $\frac{64}{9}$

5.- $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ R: 1

6.- $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x 2^x} \right)$ R : 0

7.- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$ R : ∞

8.- $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{(x^2+x-1)} - \sqrt{(x^2-x+1)} \right)$ R: 1

9.- $\lim_{x \to \infty} x - \frac{x^2}{x+1}$ R: $\frac{1}{2}$

10.- $\lim_{x \to \infty} \frac{3^{x+1}+2^{x+1}}{3^x+2^x}$ R : 3

LIMITES EXPONENCIALES : Se resuelven básicamente mediante los siguientes Limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Además es conveniente recordar que :

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = C$, teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ y

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, entonces $C = A^{B}$

CALCULAR :

1.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$ R : 0

2.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ R : e^{-2}

3.- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$ R : $\frac{1}{4}$

4.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ R : 0

5.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+5x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ R : e^{3}

6.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$ R: e^{8}

LIMITES LOGARITMICOS: Las indeterminaciones de los limites logarítmicos,

Se resuelven aplicando las propiedades de la función logarítmo.
Calcular :

1.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ R : 1

2.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$ R : 1

3.- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(1+6^x\right)}{\ln\left(1+3^x\right)}$ R: $\dfrac{\ln 6}{\ln 3}$

4.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ R : 1

5.- $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e}$ R : e^{-1}

6.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ R : 2

<u>LIMITES TRIGONOMETRICOS</u>: Son aquellos límites de funciones trigonométricas
Cuyas indeterminaciones se resuelven básicamente utilizando los siguientes límites

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

<u>CALCULAR</u> :

1.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x + x}$ R : 3

2.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tagx - \operatorname{sen} x}{x^3}$ R: $\dfrac{1}{2}$

3.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$ R: $\dfrac{\pi}{2}$

4.- $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tag} \dfrac{\pi}{2}x$ R: $\dfrac{2}{\pi}$

5.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{1-\sqrt{x}}$ R: 2π

6.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1+tagx}}{x}$ R: 0

7.- $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1}$ R: -3

8.- $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$ R: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

EJERCICIOS VARIOS.

Hallar los siguientes limites:

1.- $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}}{x^2 - x}$ R:-1

2.- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$ R:-sena

3.- $\lim_{x \to 0} \frac{tag(mx)}{\operatorname{sen}(nx)}$ R: $\frac{m}{n}$

4.- $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\pi - 4x}$ R :- $\frac{\sqrt{2}}{4}$

5.- $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$ R: $\frac{1}{2}$

6.- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x}$ R: m

7.- $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d} \right)$ R: $\frac{(a - c)}{2}$

8.- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - 5^x}{1 - e^x}$ R: ln 5

9.- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\ln(1 + x)}$ R: 2

10.- $\lim_{x \to 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$ R: 1

11.- $\lim_{x \to p} \frac{\sqrt{x - n} - \sqrt{p - n}}{x^2 - p^2}$ R: $\frac{1}{4p\sqrt{p - n}}$

12.- $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{(x-2)}}$ R: $\sqrt{e}$

13.- Determine el valor de las constantes m y n $\in$ R de manera que:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - mx - n \right) = 0$$

14.- $\lim_{x \to 5} \| x \|$ R: 5 ; 4

15.- $\lim_{x \to 0} \frac{|x| - \| x \|}{x}$ R: 1 ; ∞

15.- Dada la función $y = f(x) = \log_3 x$, Calcule $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ con $x_o \succ 0$

CONTINUIDAD:

1.- Hallar los puntos de discontinuidad de la función : f (x) = $\dfrac{2^{\frac{1}{(x-2)}}-1}{2^{\frac{1}{(x-2)}}+1}$

2.- Determine el carácter de la discontinuidad de la función: f (x) = $\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$

en el punto x = 1.

3.- Investigar si es continua o no la función f (x) = $\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ sobre el segmento

i) [2 , 5] ii) [4 , 10] iii) [0 , 7]

4.- Dada la función : f (x) = $\begin{cases} x+1 & x<2 \\ 5-x & 2\le x\le 4 \\ x-3 & x>4 \end{cases}$. Grafique dicha función y

verifique que : i) f (a) está definida

ii) existe $\lim\limits_{x\to a}$ f (x) , calculando limites laterales

iii) f (a) = $\lim\limits_{x\to a}$ f (x)

5.- Dadas las funciones: f (x) = $\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$

g (x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & x\neq 4 \\ 4 & x=4 \end{cases}$ h (x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & x\neq 4 \\ 5 & x=4 \end{cases}$

a) Analizar su discontinuidad en x = 4
b) construya el gráfico para cada función
c) indique el carácter de la discontinuidad en x = 4

6.- Determine la existencia de $\lim\limits_{x\to a}$ f (x) para la función

f (x) = $\begin{cases} \dfrac{4x^2+3x}{1+x} & si \quad x>1 \\ 3x-2 & si \quad x\le 1 \end{cases}$ (x = a)

7.- Determinar el valor del parámetro M de modo que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 + 4x + M & si \quad |x-2| \geq 1 \end{cases}$$

8.- Determinar los valores de A y B para que la función sea continua para todo R:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{A(x^3-1)}{x+1} + B & si \quad x < 1 \\ 2Ax - 3 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{B(x^2+3x-10)}{x-2} & si \quad 2 < x \end{cases}$$