UNIVERSIDAD BERNARDO O HIGGINS
ESCUELA DE INGENIERIA COMERCIAL

FUNCIONES 2005
MATEMATICAS II

---

1. Dadas las funciones

$$f :]-8{,}5[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : [-9{,}3] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^3 - 1 \qquad x \longrightarrow x^2 - 2x + 5 \qquad x \longrightarrow 3x - 2$$

Determinar las funciones siguientes:

a) $2f + 3g$ b) $f \cdot g - h$ c) $\frac{3f-h}{2id_{\mathbb{R}} - g}$

2. Sea el conjunto $A = \{$seres humanos vivos o muertos$\}$. Se definen las funciones $f : A \to A$ y $g : A \to A$ de la siguiente manera:

$f(p) =$ "padre de p" $g(p) =$ "madre de p", $\forall\, p \in A$

a) Verifique que $fog(p) =$ "abuelo materno de p", $\forall\, p \in A$;

b) Halle el significado de las composiciones gof, f^2, g^2.

3. Sean A y B dos conjuntos que tienen n y m elementos, respectivamente. Se considera una función $f : A \to B$. Compare los números naturales n y m cuando f es inyectiva, sobre y biyectiva.

4. A todo punto de un círculo se le hace corresponder el punto diametralmente opuesto. Indique si se tiene una función sobre, inyectiva, biyectiva.

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

a) Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que f sea biyectiva.

b) Probar que $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

6. Sean las funciones f, g, h dadas por:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x - 1 \qquad x \longrightarrow x^2 \qquad x \longrightarrow 2x + 1$$

Determinar:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ h$ d) $h \circ f$ e) $g \circ h$ f) $f \circ g \circ h$ g) $f \circ h \circ g$ h) $g \circ f \circ h$

7. Sean $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \frac{2x-4}{x+3}$ y $g : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \frac{3x+4}{2-x}$

a) Calcular $(g \circ f)(7)$ y $(f \circ g)(3)$

b) Determinar las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

c). Determine las funciones inversas de f y g.

8. Considerar las funciones siguientes:

a) $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \longrightarrow x^2$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^3$

c) $f: \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \longrightarrow |x|$

d) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 7 & x \neq 0 \\ 7 & x = 0 \end{cases}$

e) $f: [-1{,}6] \longrightarrow [-10{,}11]$, $x \longrightarrow 3x - 7$

Probar que todas ellas son biyectivas. Determinar en cada caso su inversa.

9. En cada caso, verifique que las funciones dadas sean inversas entre sí.

a) $f(x) = 3x - 1/2$, $g(x) = x/3 + 1/6$ b) $f(x) = \frac{3-x}{2(5-x)}$, $g(x) = \frac{3-10x}{1-2x}$

c) $f(x) = \frac{4x-1}{3x}$, $g(x) = \frac{1}{4-3x}$

10. Determine el dominio y el recorrido de f^{-1}, sin hallar la inversa de $f(x) = \sqrt{x-3}$

11. En los siguientes problemas, grafique la función dada.

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = -3^x$ c) $f(x) = 2 \cdot 3^x$ d) $f(x) = (2/3)^x$ e) $f(x) = 5^{-x+1}$

12. En los siguientes problemas, la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$ pasa por el punto dado. Encuentre f.

a) $(3,\ 64)$ b) $(3,\ e)$

13. En los siguientes problemas, encuentre los intersectos en x y en y de la gráfica de la función dada. No grafique.

a) $f(x) = 3^x - 9$ b) $f(x) = x^2 3^x - 3^{x+2}$

14. Determine el recorrido o imagen de la función: $f(x) = 10 + 5^{-x}$

15. Encuentre el valor de los logaritmos dados sin utilizar calculadora.

a) $log_{10} 0.0001$ b) $log_3 \left(3^2 \cdot 3^3\right)$ c) $log_{\sqrt{5}} 25$ d) $log^3_{\sqrt{6}} 216$

16. En los siguientes problemas llene los espacios o conteste verdadero o falso.

a). $\frac{log_5 625}{log_5 125} =$

b). Si $log_3 N = 0$, entonces $N =$

c). Si $log_{10} 5 = 0.6990$, entonces $5 =$

d). $log_{10} \left(2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3\right) =$

e). $ln\,(e + e) = 1 + ln\,2$

f). Si $log_b 12 = 1.0792$ y $log_b 4 = 0.6021$, entonces $log_b 9 =$

17. En términos de logaritmo natural, $log_4 5$ puede escribirse así ....

18. Calcule: a). $e^{ln 70} =$ b). $10^{log_{10} 4.89} =$

19. En los siguientes problemas, grafique la función dada y encuentre su dominio.
 a) $f(x) = log_3 x$ b) $f(x) = log_{1/3} x$
 c) $f(x) = log_3 (x+2)$ d) $f(x) = -2 + log_3 (x+3)$

20. El logaritmo desarrollo por John Napier fue en ralidad: $10^7 \, log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7}\right)$
 Utilice la fórmula de cambio de base para exprear este logaritmo:
 a) En términos del logaritmo natural.
 b) En términos del logaritmo en base 10

21. Demuestre que: $(log_y x)(log_x y) = 1$

22. En los siguientes problemas escriba la expresión dada como un solo logaritmo
 a). $2 log_3 8 + 3 \, log_3 2 - 2 \, log_3 6 - log_3 16$
 b). $ln (x+y) - ln \, x - ln \, y + ln (x-y)$

23. En los siguientes problemas resuelva la ecuación dada.
 a). $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9^{1-2x}$ b). $16^{2-5x} = 2^{-1}$ c). $7^{x+3} = 5$
 d). $6^{x^2} = 2^x$ e). $log_5 x = -2$ e). $ln x = 0.2$
 f). $log_2 (x+1) = log_2 (2x - 15)$ g). $log_5 (log_3 2x) = 0$
 h). $log_{100} (ln x) = \frac{1}{2}$ i). $log_{10} x + log_{10} (2x-1) = 1$
 j). $4 log_2 x - log_2 (x+2) = log_2 x^2 + log_2 1$ k). $e^{-4x} = 15$

24. La población de una colonia de bacterias se incrementa con el modelo de crecimiento $N(t) = N_0 3^{t/20}$ (donde t se mide en minutos). ¿Cuánto tiempo tarda en crecer de 100 a 200 bacterias?, ¿de 100 a 300?

25. El número de bacterias presentes en un cultivo después de t horas se da por $N(t) = N_0 e^{0.368t}$, donde el tiempo t se mide en horas. Si la colonia comenzó con 200 bacterias, ¿cuántas habrá después de ocho horas?, ¿después de un día?

26. El número de bacterias existentes en un cultivo después de t horas se da por $N(t) = N_0 e^{kt}$.
 a) Encuentre k, si se sabe que después de dos horas la colonia ha extendido 1.5 veces su población inicial.
 b) Encuentre el tiempo que tarda para cuadruplicar su tamaño.

27. La población mundial en 1976, según el informe de un semanario, era de 4.000 millones de personas. Se estima que en 1986 era de 4.700 millones. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual en esos diez años? ¿Cuál será la población mundial, de mantenerse esta tasa, en el año 2026?

28. La población de una pequeña comunidad después de t años es aproximadamente de $P(t) = 2.500e^{kt}$. Si después de diez años la población inicial aumentó en 40%, ¿cuál será la población aproximada después de otros diez años?

29. Suponga que cierta sustancia radiactiva se desintegra a tal ritmo que, al final de cualquier día, sólo existe la tercera parte de la cantidad presente al comienzo del día.
a) Si inicialmente hay 300 grs. de la sustancia, ¿cuánto quedará al final de t días?
b) ¿Qué cantidad de la sustancia queda al final de una semana?

30. Un principio básico de enfriamiento en física, llamdo la ley de enfriamiento de Newton, establece que si un objeto a temperatura T_0 se coloca en un medio ambiente de temperatura constante C, entonces la temperatura T del objeto después de t minutos está dada por: $T(t) = C + (T_0 - C)e^{-kt}$, donde k es una constante que depende de cada objeto. Si un pastel se saca del horno a una temperatura de 300^oF para un cuarto con temperatura constantede 70^oF, y al cabo de 10 minutos tiene una temperatura de 250^oF, ¿cuál es la constante k del pastel? ¿Cuál será la temperatura del pastel al cabo de 30 minutos? ¿Qué tiempo tardará en tener una temperatura de 120^oF?

31. Si se conoce que la constante k en la ley de enfriamiento de Newton para una botella de jugo de naranja es $k = 0.092$, determine la cantidad de minutos que se demora en alcanzar la temperatura de 55^oF una botella de jugo de naranja que está a 70^oF y se introdue en una nevera que mantiene una temperatura constante de 45^oF.

32. Un altímetro es un instrumento que mide la altitud; la mayoría de los aviones mide la altitud por medio de una escala que se calibra mediante la ecuación: $h = (30t + 8000)ln\,(p_o/p)$, donde h es la altura en metros sobre el nivel del mar, t es la temperatura del aire en grados Celsius, p_o es la presión atmosférica al nivel del mar, y p es la presión atmosférica a la altura h. La presión atmosférica se mide en centímetros de mercurio. Suponga que la presión atmosférica a cierta altura h es de 25.3 cm. de mercurio siendo la temperatura -2^oC. Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 75 cm. de mercurio, ¿cuál es la altitud del avión en pies?

33. Puede demostrarse que si en cierto año se consume una cantidad de A_0 de petróleo, y si existe una tasa de crecimiento anual de consumo r, entonces la cantidad A de petróleo consumido en los siguientes t años está dada por:

$$A = \frac{A_0}{r}(e^{rt} - 1)$$

a) Despeje t.
b) En 1990 se estimó que las reservas de petróleo disponibles en el mundo eran de 983.4 miles de millones de barriles de petróleo y que en ese año se consumieron 12.3 miles de millones. Si existe una tasa anual de crecimiento del consumo de petróleo de 2.5%, estime el año que pronostica la fórmula anterior que se terminará la reserva de 1990.