UNIVERSIDAD BERNARDO O HIGGINS
ESCUELA DE INGENIERIA COMERCIAL

GUIA DE EJERCICIOS : LIMITES Y CONTINUIDAD

PROF.:VIVIANA BARILE

1.- Sea $f(x) = \dfrac{\text{sen (x)}}{\text{x}}$ complete la siguiente tabla:

x	1	0.1	0.01	0.001	0	-0.001	-0.01	-0.1	-1
f(x)									

De acuerdo con la tabla ¿es posible que exista el $\lim\limits_{x \to 0} \text{f(x)}$? De ser así, dé un valor estimado.

2.- Confeccione una tabla de valores que le permita estimar los límites de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\text{x - 2}}{\text{x}^2 - x - 2}$ cuando x tiende a 2

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\text{x} + 3} - \sqrt{3}}{\text{x}}$ cuando x tiende a 0

c) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{x} \neq 1 \\ 1 & \text{x} = 1 \end{cases}$

3.- Dado que $\lim\limits_{x \to \infty} \text{f(x)} = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} \text{g(x)} = 1$

Analizar:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} [\text{f(x)} + \text{g(x)}]$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{\text{f(x)}}{\text{g(x)}}\right]$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{\text{g(x)}}{\text{f(x)}}\right]$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} [\text{f(x)} * \text{g(x)}]$

4.- Siendo $f(x) = \begin{cases} 2\text{x} & x \rangle 3 \\ 8 & x = 3 \\ 3x - 3 & \text{x} \rangle 3 \end{cases}$ Demostrar que $\lim\limits_{x \to 3} \text{f(x)} = 6$

5.- Mediante algebra de límites, calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\text{x}^2 - 4}{\text{x} + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\text{x}^2 - 1}{\text{x} + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{\text{x} + 1} - 2}{\text{x} - 3}$ d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2(\text{x} + \Delta\text{x}) - 2\text{x}}{\Delta\text{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\text{x}^2 - 7\text{x} + 12}{\text{x}^2 - 9}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\text{x}^5 - 1}{\text{x}^3 - 1}$ g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + \text{x}}}{1 - \sqrt{5 - \text{x}}}$ h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\text{x} - \sqrt{3\text{x} - 2}}{2\text{x} - \sqrt{5\text{x} + 6}}$

6.- Determine si existen los siguientes límites

a) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^2+3x}{1+x} & x \rangle 1 \\ 3x-2 & x \leq 1 \end{cases}$ cuando x tiende a 1

b) $g(x)=\begin{cases} x & x \leq 1 \\ 1-x & x \rangle 1 \end{cases}$ cuando x tiende a 1

c) $g(x)=\begin{cases} 5-x & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2-1 & 2 \langle x \leq 3 \end{cases}$ cuando x tiende a

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

7.- Dadas las funciones , analice para cada una su continuidad en x=4

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$ b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & x \neq 4 \\ 4 & x=4 \end{cases}$ c) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & x \neq 4 \\ 5 & x=4 \end{cases}$

8.- Determine el valor de las constantes a y b de modo que la función sea continua:

a) $f(x)=\begin{cases} -2\,\text{sen}\,x & x \leq -\pi/2 \\ a\,\text{sen}\,x+b & -\pi/2 \langle x \langle \pi/2 \\ \cos x & x \geq \pi/2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(x^3-1)}{x+1}+b & x \langle 1 \\ 2ax-3 & 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{b(x^2+3x-10)}{x-2} & x \rangle 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+2a & x \langle -2 \\ 3ax+b & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x^2 & x \rangle 1 \end{cases}$

Sean:

$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x \langle 1 \\ 2x & x \rangle 1 \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 2x^3 & x \langle 1 \\ 3 & x \rangle 1 \end{cases}$

a) Pruebe y verifique que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ no existen.

b) Hallar $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$ si $H(x)=(f*g)(x)$

9.- Use la definición de límite para demostrar que :

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 5) = 11$

b) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$

10 Calcular los siguientes limites

1.- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$ R : $\dfrac{-1}{6}$

2.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ R : $\dfrac{5}{3}$

3.- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$ R : $\dfrac{-1}{3}$

4.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1 + x}\right) - 1}{\left(\sqrt[3]{1 + x}\right) - 1}$ R : $\dfrac{3}{2}$

5.- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2}$

6.- $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x + 3}{x + 2}$

7.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x + 4}$

9.- $\lim \dfrac{3 + 0.5^x}{0.3^{x+1} + 5}$ R : $\dfrac{3}{5}$

10.- $\lim \dfrac{9 + \dfrac{x}{x+1}}{2 + \dfrac{1}{x}}$ R :

11 CALCULAR :

1.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$ R : 0

2.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ R : e^{-2}

3.- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$ R : $\dfrac{1}{4}$

4.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ R : 0

5.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1+5x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ R : e^3

6.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x}$ R: e^8

12 Se resuelven aplicando las propiedades de la función logarítmo. Calcular :

1.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$ R : 1

2.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x}$ R : 1

3.- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(1 + 6^x\right)}{\ln\left(1 + 3^x\right)}$ R: $\dfrac{\ln 6}{\ln 3}$

4.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\right)$ R : 1

5.- $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$ R : e^{-1}

6.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ R : 2

14 CALCULAR :

1.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x + x}$ R : 3

2.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tagx - \operatorname{sen} x}{x^3}$ R: $\dfrac{1}{2}$

3.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - x}$ R: $\dfrac{\pi}{2}$

4.- $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \operatorname{tag} \dfrac{\pi}{2} x$ R: $\dfrac{2}{\pi}$

5.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{1 - \sqrt{x}}$ R: 2π

6.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 + tagx}}{x}$ R: 0

7.- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1}$ R: -3

8.- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$ R : $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

15.- Dadas las funciones: f (x) = $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

g (x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & x \neq 4 \\ 4 & x = 4 \end{cases}$

h (x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & x \neq 4 \\ 5 & x = 4 \end{cases}$

a) Analizar su discontinuidad en x = 4
b) construya el gráfico para cada función
c) indique el carácter de la discontinuidad en x = 4

16.- Determinar el valor del parámetro M de modo que la función sea continua

f (x) = $\begin{cases} x + 1 & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 + 4x + M & si \quad |x - 2| \geq 1 \end{cases}$

17.- Determinar los valores de A y B para que la función sea continua para todo R:

F (x) = $\begin{cases} \dfrac{A(x^3 - 1)}{x + 1} + B & si \quad x < 1 \\ 2Ax - 3 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{B(x^2 + 3x - 10)}{x - 2} & si \quad 2 < x \end{cases}$

18. Calcule los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - 1)^3 + 1}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^2}{x^2 - x}$ f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{\sqrt{x + 8} - 2}$ h) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}}{x - a}$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$ j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$

k) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{\sqrt{5 - x^2} - 2}$ l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt[4]{x + 1}}{x}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{3x}$ n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

ñ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{28 - x} - 3}{x - 1}$ o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 2^{2x}}{4x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{\operatorname{sen}(4x)}$ q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\operatorname{sen}(2x)}$

19 Continuidad

a) Si
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A(x^3 - 1)}{x - 1} + B, & si \quad x < 1 \\ 2Ax - 3, & si \quad 1 \le x \le 2 \\ B\dfrac{(x^2 + 3x - 10)}{x - 2}, & si \quad 2 < x \end{cases}$$

determinar los valores de A y B para que la función f sea contínua sobre IR.

b) Determine valores reales c y k, de modo que f sea contínua en toda la recta real, donde:
$$f(x) = \begin{cases} x + 2c, & si \quad x < -2 \\ 3cx + k, & si \quad -2 \le x \le 1 \\ 3x^2 - 2x, & si \quad x > 1 \end{cases}$$

c) Determine condiciones sobre $p \in R$ de modo que
$$f(x) = \begin{cases} 2px + x^2, & si \quad x \le 1 \\ 8p + x + 1), & si \quad x > 1 \end{cases}$$
sea contínua en todo IR.

d) Existe $\alpha, \beta \in IR$ de modo que f sea contínua en IR ?, donde:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^2 + \beta}{1 + x}, & si \quad o < x \le 4 \\ 3\alpha + 2x, & si \quad 4 < x < 8 \\ 6, & si \quad 8 \le x \end{cases}$$

e) Determine condiciones sobre A,B en IR, para que f sea contínua en los reales si :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{3} \bullet \dfrac{(x^2 - 1)}{x - 1}, & si \quad x < 1 \\ 2Ax + B, & si \quad 1 \le x \le 4 \\ \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & si \quad 4 < x \end{cases}$$

20).- Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$, b) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$,

c) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$, $n \in IN$, d) $\lim_{x \to 6} \dfrac{\sqrt[3]{5x - 3} - 3}{x - 6}$,

e) $\lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x + 6} - 4}{x - 5}$, f) $\lim_{\alpha \to 10} \dfrac{\sqrt[5]{-2 - 3\alpha} + 2}{\alpha - 10}$,

g) $\lim_{x \to b} \dfrac{x^n - b^n}{x^m - b^m}$, $m, n \in IN$, h) $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)\sqrt{2 - x}}{x^2 - 1}$

i) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$

21).- Sabiendo que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$,

Calcule:

a) $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ b) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x + 1}\right)^x$ c) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$

d) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^x$ e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ f) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - a}{x}\right)^x$

22).- Calcule los siguientes límites al infinito:

1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^2 - 1}}{\sqrt[3]{1 - 8x^3}}$ 2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^4 + 5x^2}{-x^4 - 10x + 5}$

1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 6x}{5x^4 + x^3 - 5x}$ 4) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + x}{6x^3 - x^2}$

5) $\lim_{\alpha \to \infty} \dfrac{\sqrt{3\alpha^2 - \alpha}}{\alpha}$ 6) $\lim_{\beta \to \infty} \left(\sqrt{\beta^2 + \beta} - \beta\right)$

7) $\lim_{\delta \to \infty} \left(\sqrt{\delta^2 + 100} - \delta\right)$ 8) $\lim_{a \to \infty} \dfrac{2a^2 - 3a - 1}{\sqrt{a^4 - 1}}$