UNIVERSIDAD BENARDO O HIGGINS
ESCUELA DE INGENIERIA COMERCIAL

GUIA DE ESTUDIO TERCERA PRUEBA Y EXAMEN

1.- Una lechería produce leche entera y descremada en cantidades x e y galones respectivamente. Suponga que el precio de leche entera es $p(x) = 100 - x$ y el de la leche descremada es $q(y) = 100 - y$. Si $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$ es la función de costos conjuntos de los productos.¿Cuáles deberán ser x e y para maximizar las utilidades?¿Cuál es la utilidad máxima?

2.- Halle la combinación de bienes x e y que minimizarán los costos para que un producto enfrente la siguiente función de costo y las restricciones de cuotas de producción:

$C = 5x^2 - 3xy + 8y^2 + 95$, sujeta a $x + y = 64$

3.- Suponga que cuando la producción de una mercancía determinada requiere de x horas – máquinas y de y horas – hombre, el costo de producción está dado por $C(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$. Determine el número de horas – máquina y el número de horas – hombre necesarias para producir la mercancía a un costo mínimo.

4.- Una empresa produce x lavadoras e y secadoras a un costo de $C(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ unidades monetarias. Los ingresos son

$I(x,y)=2x+3y$ unidades monetarias. Hallar la máxima utilidad. **NOTA**: La utilidad se obtiene como $U(x,y)=I(x,y)-C(x,y)$.

5.- La función de producción para un fabricante está dada por $P(x,y)=100\sqrt[4]{x^3y}$, donde x representa las unidades de trabajo a 150 dólares la unidad e y representa las unidades de capital a 250 dólares por unidad. El costo total de trabajo y de capital se limita a 50.000 dólares. Halle el nivel de producción máxima de este fabricante.

6.- Un productor agrícola vende dos tipos de productos. Los ingresos anuales totales $I(x,y)$ en miles de dólares se comportan como una función del número de unidades vendidas dada por la expresión: $I(x,y)=400x-4x^2+1960y-8y^2$, en donde x e y son respectivamente el número de unidades, expresadas en cientos vendidas de cada uno de los productos. El costo total $C(x,y)$ de producción de los productos es $C(x,y)=100+2x^2+4y^2+2xy$. Determine el número de unidades de cada producto que se deben producir y vender con el fin de maximizar la utilidad.

7 A un editor se le han asignado US$ 60.000 para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x miles de dólares en desarrollo e y miles de dólares en promoción, se venderán aproximadamente $f(x,y)=20x^{\frac{2}{3}}\cdot y$ ejemplares del libro ¿Cuántos dinero debe asignar al editor a desarrollo y cuánto a promoción para maximizar las ventas?.

8.- Un consumidor tiene US$ 600 para gastar en dos artículos, el primero de los cuales tiene un valor de US$ 20 por unidad y el segundo US$ 30 por unidad. Si la utilidad obtenida por el consumidor de x unidades del primer artículo e y unidades del segundo está dada por la función de utilidad de Cobb – Douglas:

$$U(x,y)=10x^{0.6}y^{0.4}$$

¿Cuántas unidades de cada artículo debería comprar el consumidor para maximizar la utilidad?

9.- La función de producción para un cierto fabricante es $f(x,y) = 4x + xy + 2y$. Supongamos que la máxima inversión posible en trabajo y capítal es de \$ 2000 y que las unidades de trabajo y capital cuestan respectivamente \$ 20 y \$ 4. Calcular el nivel de producción máximo para ese fabricante.

6. Sea $u = \dfrac{xy}{x+y}$, muestre que u satisface la ecuación:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1. Sustituyendo directamente verifique que $\mu = \dfrac{ax^2+by^2}{cx^2+dy^2}$ es una solución de la ecuación diferencial:

$$x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

2. Obtenga las derivadas parciales primeras respecto de cada una de las variables independientes.

a) $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos xy$ **R**: $f_x(x,y) = 3x^2y^2 + 4x^3 \sin y + -y \sin xy$
$f_y(x,y) = 2x^3y + x^4 \cos y - x \sin xy$

b) $f(x,y) = (x-y)\sin(x+y)$

c) $x = r \sin\phi \cos\theta$ **R:** $x_r = \sin\phi\cos\theta$, $x_\phi = r\cos\phi\cos\theta$
$x_\theta = -r\sin\phi\sin\theta$

d) $u = x + y + xy + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ **R:** $u_x = \dfrac{x^2y + x^2y^2 + x^2 - y^2}{x^2y}$

$u_y = \dfrac{xy^2 + x^2y^2 - x^2 + y^2}{xy^2}$

e) $f(x,y,z) = x^y + x^z + y^x + y^z + z^x + z^y$ **R:** $f_x = yx^{y-1} + zx^{z-1} + y^x \ln y + z^x \ln z$,
$f_y = x^y \ln x + xy^{x-1} + zy^{z-1} + z^y \ln z$
$f_z = x^z \ln x + y^z \ln y + xz^{x-1} + yz^{y-1}$

3. Calcule las derivadas parciales de segundo orden para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ **R:** $f_{xx} = -\dfrac{2y}{(x+y)^3}$, $f_{xy} = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, $f_{yy} = \dfrac{2x}{(x+y)^3}$

b) $u = xe^y + y\sin z$ **R:** $u_{xx} = 0$, $u_{yy} = xe^y$, $u_{zz} = -y\sin z$, $u_{xy} = e^y$, $u_{xz} = 0$,
$u_{yz} = \cos z$

c) $u = z\arctan\dfrac{y}{x}$ **R:** $u_{xx} = \dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $u_{yy} = -\dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $u_{zz} = 0$, 11.Suponga que existen funciones *u, v* que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} u\cos v = x+1 \\ u\sin v = x+y \end{cases}.$$

Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ **R:** $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos v + \sin v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin v$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - \sin v}{u}$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{u}$$

10.Suponga que z es una función de x e y que satisface la ecuación que se da en cada caso. Encontrar sus derivadas parciales de primer orden.

a) $x^3 + y^3 + z^3 + \sin xz + \cos yz = 15$

b) $e^z + x^2 \ln z + y = 0$ **R:** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz\ln z}{ze^z + x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{ze^z + x^2}$$

14. Si u es función implícita de x, y y z en la primera ecuación y z es función implícita de x e y en la segunda ecuación. Considerando u en consecuencia como función de x e y, encontrar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$:

a) $x^2 + y^3 + z^4 + u^5 = 1$, $x + y^2 + z^3 = 1$

b) $u = x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1$, $z = x^2 + y^2 + z^2$

c) $u = x + y + z + e^u = 1$, $z = x + y + \sin z$

Resp: a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4z - 6x}{15u^4}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{8yz - 9y^2}{15u^4}$

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2 - 6x^2z + 6xz^2}{(1-2z)(1-3u^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2 - 6y^2z + 6yz^2}{(1-2z)(1-3u^2)}$

c) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 - \cos z}{(1-\cos z)(1-e^u)}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2 - \cos z}{(1-\cos z)(1-e^u)}$