Varianz/Kovarianzberechnung eines ARMA(1,1):

Ich beziehe mich bei der Herleitung auf einige Formeln und Sätze des Skripts „Finanz- und Zeitreihenökonometrie“ von Prof. Dr. Hassler aus dem Sommersemester 2007.

Ich berechne die Varianz mithilfe des Satzes 3.2 (LP):

$$c_j = a^{j-1} \cdot (a+b) \quad j \geq 1$$

$$\gamma(h) = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot c_{j+h}$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2\right)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a^{2j-2} \cdot (a+b)^2\right)$$

Die weiteren Rechenschritte für die Varianz $\gamma(0)$ ergeben sich wie folgt:

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a^{2j-2} \cdot (a+b)^2\right)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)-2} \cdot (a+b)^2\right)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \left(1 + (a+b)^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j}\right)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \left(1 + (a+b)^2 \cdot \frac{1}{1-a^2}\right)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{(1-a^2)}{(1-a^2)} + \frac{(a+b)^2}{1-a^2}\right)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \cdot \frac{(1+b^2+2ab)}{1-a^2}$$

Wichtig zum Verständnis der Herleitung ist, dass $j \geq 1$ ist (Seite 24 unten) und deshalb eine Indexverschiebung vorgenommen werden muss. Weiterhin ist $c_0=1$ (siehe Formel (3.2)). Auch die Formel der unendlichen geometrischen Reihe wird benötigt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot b^{c \cdot i} = a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b^{c \cdot i} = a \cdot \frac{1}{1-b^c}$$

Bei der Kovarianz $\gamma(1)$ ergibt sich:

$$c_j = a^{j-1} \cdot (a+b)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot c_{j+1}$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left(1 \cdot c_1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cdot c_{j+1} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left(1 \cdot a^0 \cdot (a+b) + \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} \cdot (a+b) \cdot a^j \cdot (a+b) \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left((a+b) + \sum_{j=1}^{\infty} a^{2j-1} \cdot (a+b)^2 \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left((a+b) + (a+b)^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a^{2j-1} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left((a+b) + (a+b)^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j+1} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left((a+b) + a \cdot (a+b)^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} a^{2j} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left((a+b) + (a^2 + 2\mathrm{ab} + b^2) \cdot a \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left((a+b) + (a^3 + 2a^2 b + a b^2) \cdot \frac{1}{1-a^2} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{(a+b) \cdot (1-a^2)}{1-a^2} + \frac{(a^3 + 2a^2 b + a b^2)}{1-a^2} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{(a+b-a^3-a^2 b)}{1-a^2} + \frac{(a^3 + 2a^2 b + a b^2)}{1-a^2} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{(a+b-a^3-a^2 b + a^3 + 2a^2 b + a b^2)}{1-a^2} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \left(\frac{(a+b+a^2 b + a b^2)}{1-a^2} \right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \cdot \frac{(a+b) \cdot (1+a b)}{1-a^2}$$