Entscheidungstheorie **WS 06/07**
Prof. Dr. Schmidt / PD Marcel Tyrell
Zusammenfassende Stichpunkte

Erwartungen über Umweltzustände (Differenzierung nach Frank H. Knight):

- Sicherheit
  Zukünftige Umweltentwicklungen mit Sicherheit bekannt
  Handlungen determinieren eindeutige Konsequenzen
- Ungewissheit
  Zukünftige Umweltentwicklungen nicht mit Sicherheit bekannt
  - uncertainty (Unsicherheit im engeren Sinne)
    keine Einschätzung verfügbar, wie wahrscheinlich welche Umweltentwicklung ist; eine Lösungsmöglichkeit ist das Dominanzprinzip
  - risk (Risiko; Unsicherheit im weiteren Sinne)
    subjektive oder objektive Eintrittswahrscheinlichkeiten für Umweltentwicklungen verfügbar

Entscheidung bei Sicherheit Axiome:

1. Ordnungsaxiom
   ein Entscheider kann für jedes Paar an Ergebnissen eine Präferenzrelation angeben (präferieren oder indifferent sein)
2. Transitivitätsaxiom (Rationalitätsaxiom)
3. Arbitragefreiheitsprinzip (bei Arbitrage Verletzung des Dominanzprinzips und Transitivitätsaxiom gilt nicht)
4. Dominanzprinzip
   mehr ist besser (Banane + 3€ > Banane + 0€)

Ordinale versus Kardinale Wertefunktionen:

- Ordinale Präferenz- und Nutzenfunktionen sind bis auf eine streng monoton wachsende Transformation festgelegt (Gebrauch bei Sicherheit).
- Kardinale Präferenz- und Nutzenfunktionen sind bis auf eine positive lineare Transformation festgelegt (Gebrauch bei Unsicherheit). Präferenzen lassen sich nur dann durch kardinale Wertfunktionen repräsentieren, wenn sie Ordnungsaxiom, Transitivitätsaxiom, Unabhängigkeitsaxiom (siehe unten) und Stetigkeitsaxiom erfüllen.

Transformationskonzept:
Verwendung des Transformationskonzepts bei mehreren Zielen führt zu guten Entscheidungen. Man versucht die Zielgrößen der verschiedenen Handlungsalternativen anzugleichen, so dass sich die Handlungsalternativen am Ende nur noch in einer Zielgröße unterscheiden. Dann kann man das Dominanzprinzip anwenden. Sukzessiver, wertäquivalenter Austausch von Elementen. Kritik: Es könnte zu hohe Anforderungen an den Entscheider stellen. Ist der Entscheider in der Lage das Konzept richtig durchzuführen?

Kriterium, Prinzip, Regel:

- Entscheidungskriterium
  einzelne Größen, an denen sich der Entscheider orientiert
- Entscheidungsprinzip
  allgemeine Form der Problemlösung
- Entscheidungsregel
  eindeutige Problemlösung/konkrete Regel

Ersatzkriterien (wenn das Ordnungsaxiom vom Entscheider wegen Überforderung nicht durchgeführt werden kann):

- Zielunterdrückung
- Lexikographische Ordnung
- Effizienzkriterium
  dominierte Strategien werden eliminiert

- Maximierung/Minimierung einer Zielgröße bei gegebenem Anspruchsniveau für die anderen Zielgrößen
- Zielgewichtung (Maximierung/Minimierung der gewichteten Summe)

Entscheidungsregeln für den Fall der uncertainty (siehe oben):
- Maximin/Maximax (Risikoaversion/Risikofreude)
  (bzw. Minimin/Minimax für den Fall, dass kleiner Ergebnisse besser sind)
- Laplace-Regel (Summe der Zeilenwerte, ohne Wahrscheinlichkeiten, Risikoneutralität)
- Hurvicz-Prinzip (α mal bestes + (1- α) mal schlechtestes Ergebnis maximieren, inklusive persönlicher Risikoneigung aber unvollständige Abbildung der Risikoneigung, nicht alle Informationen werden genutzt; das Maximin/Maximax-Prinzip ist ein Spezialfall des Hurvicz-Prinzips für α=0 bzw. α=1)

Eine Entscheidungsregel bei Ungewissheit sollte...
- ...das Dominanzprinzip beachten
- ...alle verfügbaren Informationen verwenden (alle Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten)
- ...die persönliche Risikoneigung berücksichtigen
- ...unabhängig von Addition einer Konstanten sein
- ...unabhängig von Duplikation einer Spalte sein
- ...unabhängig von Hinzunahme weiterer Alternative sein
- ...unabhängig von der Anordnung der Alternative sein
- ...Vollständigkeit und Transitivität beachten

Bei Unsicherheit ist jede Alternative eine Lotterie mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Entscheidungskriterien bei Risiko:
- μ-Regel (Erwartungswertregel, ohne Risikomaß, auch Bayes-Regel)
- μ-σ-Prinzip (Verletzt manchmal das absolute Dominanzprinzip) klassisch
  benötigt eine Funktion in die Mittelwert und Streuung eingehen
- Bernoulli-Prinzip (Erwartungsnutzenregel) rational

Wertfunktion:
- Präferenzfunktionen ($\Phi(A)$) weisen Alternativen einen Präferenzwert zu, das heißt sie ordnen Alternativen
- Nutzenfunktionen (U(E))weisen Ergebnissen einen Nutzenwert zu, das heißt sie ordnen Ergebnisse
- Bei sicheren Erwartungen sind Präferenzwert und Nutzenwert äquivalent, da jede Alternative einem Ergebnis entspricht

Axiomatik des Bernoulli-Prinzips (Maximiere den Erwartungswert des Nutzens):
- Rationalitätsaxiome
  - Dominanzprinzip
  - Ordnungsaxiom (aber hier Alternativen nicht Ergebnisse)
  - Transitivitätsaxiom (aber hier Alternativen nicht Ergebnisse)
- Repräsentationstheorem
  Sind die Präferenzen vollständig und transitiv, lassen sie sich durch eine mathematische ordinale (bei Sicherheit) oder kardinale (bei Risiko) Wertfunktion repräsentieren.
- Eindeutigkeit (bis auf positive lineare Transformation eindeutig bestimmt s.o.)
- Stetigkeitsaxiom (Kontinuitätsaxiom)
- Unabhängigkeitsaxiom (Substitutionsaxiom)

Bernoulli-Regel:
- ist bei eindimensionalen Ergebnissen äquivalent zur μ-Regel wenn der Entscheider risikoneutral ist
- ist bei eindimensionalen Ergebnissen äquivalent zur μ-σ-Regel wenn der Entscheider entweder eine quadratische Nutzenfunktion hat oder die Ergebnisse der Lotterie normalverteilt sind und der Entscheider eine konkave Nutzenfunktion hat

Die Nutzenfunktion ergibt sich durch:

- Befragung
- Introspektion (=Selbstbeobachtung)
- Mathematische Approximation

Risikoaversion:

- Risikoaversion: SÄ<E(W) oder E(U(W))<U(E(W))
- Risikoneutralität: SÄ=E(W) oder E(U(W))=U(E(W))
- Risikofreude: SÄ>E(W) oder E(U(W))>U(E(W))
- Risikoaversion „im Großen/global" (konkave Nutzenfunktion U''(W)<0 über den gesamten Definitionsbereich)
- Risikoneutralität „im Großen/global" (lineare Nutzenfunktion U''(W)=0 über den gesamten Definitionsbereich)
- Risikofreude „im Großen/global" (konvexe Nutzenfunktion U''(W)>0 über den gesamten Definitionsbereich)
- Risikoaversion im „Kleinen" (konkave Nutzenfunktion in dem Umfeld eines bestimmten Endvermögens W)
- Zur Bestimmung der RA im Kleinen ☐ Arrow-Pratt Risikoaversionsmaße „APR" (lokale Risikoaversion)
- ARA: $a(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$ (absolutes Risikoaversionsmaß)
- RRA: $a(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \cdot W$ (relatives Risikoaversionsmaß)
- RTM: $t(W) = \frac{1}{a(W)}$ (Risikotoleranzmaß (≠ Risikofreude))
- mehr Risikotoleranz bedeutet weniger Risikoaversion

Typen von Risikonutzenfunktionen:

- linear: $U(W) = W$
- exponentiell: $U(W) = -e^{-kW}$
- logarithmisch: $U(W) = \log(W+b)$
- potenz: $U(W) = \frac{1}{c}(W+b)^c$
- quadratisch: $U(W) = -W^c$

Darstellung von Entscheidungsproblemen:

- Extensive Form (Baum-Diagramm)
  gut geeignet für dynamische Spiele (mehrere Perioden; sequenzielle Struktur) und die Lösung von flexiblen Planungsproblemen
- Strategische Form (Matrix-Schreibweise; Normalform)
  bei dynamischen Spielen kann eine Matrix nur zu einer starren Strategie führen
- Will man ein statisches Spiel (simultanes Spiel) in der extensiven Form darstellen muss man Informationsbezirke verwenden.

Wahrscheinlichkeitsinterpretationen:

- Symmetrieabhängig (Objektivität)
  Gleichverteilung wird angenommen
  Bsp.: idealer Würfel, Münzen
- Frequentistisch
  aus relativen Häufigkeiten
- Subjektivistisch (Subjektivität)
  Grad des vernünftigen Vertrauens in das Eintreten

abnehmende Objektivität

Wahrscheinlichkeiten:

- a priori $p(S_s)$
  Wahrscheinlichkeit für den Umweltzustand vor Information

- Likelihoods $p(I_i|S_s)$
  Güte des Informationssignals
- verbundene (totale) $p(I_i \cap S_s)$
- a posteriori $p(S_s|I_i)$
  Wahrscheinlichkeit für den Umweltzustand nach Information

Bayes Theorem
(Revision subjektiver Wahrscheinlichkeiten (a priori Wkt.) durch Informationen(deren Likelihoods) in Wahrscheinlichkeiten nach Information (a posteriori Wkt.)):

a priori	S_1	S_2	S_3	Σ
	$p(S_1)$	$p(S_2)$	$p(S_3)$	1

Likelihoods	S_1	S_2	S_3
I_1	$p(I_1\|S_1)$	$p(I_1\|S_2)$	$p(I_1\|S_3)$
I_2	$p(I_2\|S_1)$	$p(I_2\|S_2)$	$p(I_2\|S_3)$
I_3	$p(I_3\|S_1)$	$p(I_3\|S_2)$	$p(I_3\|S_3)$
Σ	**1**	**1**	**1**

$$p(I_i \cap S_s) = p(I_i|S_s) \cdot p(S)$$

verbundene	S_1	S_2	S_3	p(I)
I_1	$p(I_1 \cap S_1)$	$p(I_1 \cap S_2)$	$p(I_1 \cap S_3)$	**$p(I_1)$**
I_2	$p(I_2 \cap S_1)$	$p(I_2 \cap S_2)$	$p(I_2 \cap S_3)$	**$p(I_2)$**
I_3	$p(I_3 \cap S_1)$	$p(I_3 \cap S_2)$	$p(I_3 \cap S_3)$	**$p(I_3)$**
p(S)	**$p(S_1)$**	**$p(S_2)$**	**$p(S_3)$**	

$$p(S_s|I_i) = \frac{p(I_i \cap S_s)}{p(I_i)}$$

a posteriori	S_1	S_2	S_3	Σ
I_1	$p(S_1\|I_1)$	$p(S_2\|I_1)$	$p(S_3\|I_1)$	**1**
I_2	$p(S_1\|I_2)$	$p(S_2\|I_2)$	$p(S_3\|I_2)$	**1**
I_3	$p(S_1\|I_3)$	$p(S_2\|I_3)$	$p(S_3\|I_3)$	**1**

Bayes Formel (als Kurzform):

$$p(S_s|I_i) = \frac{p(S_s) \cdot p(I_i|S_s)}{\sum_{i=1}^{n} p(S_s) \cdot p(I_i|S_s)}$$

Einflüsse auf den Informationswert:
- wenn die Gewinne/Ergebnisse stärker streuen, nimmt der Informationswert in der Regel zu
- hohe a-priori Wahrscheinlichkeiten in Umweltzuständen mit geringen Unterschieden in den Ergebnissen senken den Informationswert, weil mit hoher Wahrscheinlichkeit ohne Information ein kleiner Fehler gemacht wird

Teilspielperfektheit erfordert, dass die Entscheidung in jedem Teilspiel optimal ist (in jedem

Teilspiel ein Nash-Gleichgewicht). Aus diesem Grund ist es nicht optimal bei mehr als einer Periode („dynamische Spiele") bereits zu Beginn eine fixe Strategie („starre Planung") festzulegen. Teilspielperfektheit impliziert, dass alle Informationen genutzt werden. Zu diesen Informationen gehören vor allem die „Züge der Natur".

In der ersten Periode wird entschieden, ob Informationen beschafft werden oder nicht. Die Entscheidung der Informationsbeschaffung wird der eigentlichen Entscheidung vorgelagert. Je nach Informationsergebnis/"Zug der Natur" ergibt sich in der zweiten Periode ein anderes Teilspiel.

Wenn sich die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten von den a-priori Wahrscheinlichkeiten stark unterscheiden ist die Informationsquelle verlässlich (hohe Likelihoods) und der Wert der Information steigt. Der Wert der Information kann größer oder geringer sein als die Kosten der Information. Wenn die Kosten der Informationsbeschaffung größer als der Informationswert sind, lohnt sich die Informationsbeschaffung trotz positivem Informationswert nicht.

Maximaler Informationswert („Wert perfekter Information"):
- Likelihoods und a-posteriori Wahrscheinlichkeiten sind 1 (perfekte Zuverlässigkeit/Vertrauenswürdigkeit der Signale)
- Perfektes Informationssystem
- Umweltzustand ist mit Sicherheit bekannt
- bei einem perfekten Signal sind die a-priori Wahrscheinlichkeiten identisch mit den Wahrscheinlichkeiten für den Informationseintritt ($p(I_i)$; unbedingte Signalwahrscheinlichkeiten)

Rationale Informationsbewertung (Meta-Entscheidungsprobleme):
- ökonomisch rationale Informationsbewertung meint durch Informationsbeschaffung die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Umweltzustände zu verändern
- denn wenn man denkt, es könnte weitere Alternativen oder Umweltzustände geben, hat man bereits die Information, dass es sie gibt

Definition „Spiel":
- formale Repräsentation einer Situation
- Spieler interagieren strategisch
  1. Spieler
     wer und wie viele?
  2. Regeln
     welche Aktionen? wer ist wann am Zug (vielleicht auch simultan?)?
  3. Ergebnisse
     gibt es ein Gleichgewicht? welches Gleichgewicht? Ausgang des Spiels?
  4. Auszahlungen
     wie werden Ergebnisse bewertet?
- wenn man die Handlung des anderen Spielers bereits kennt, steht man quasi vor einem Entscheidungsproblem bei Sicherheit

Informationsbezirk:
- Teilmenge der Gesamtmenge der Entscheidungsknoten eines Spielers
- Entscheidungsknoten innerhalb eines Informationsbezirks sind für den entsprechenden Spieler nicht unterscheidbar
- das bedeutet, er weiß nicht welche Aktion der andere Spieler zuvor getätigt hat
- dieses nennt man auch Spiel mit „imperfekter Information"
- besteht jeder Informationsbezirk eines Spielers aus nur einem Knoten so spricht man von perfekter Information

Vollständige-/unvollständige Informationen:
Auszahlungsfunktionen sind den Spielern bekannt (common knowledge), keine anfänglichen Spielzüge der Natur bzw. bekannte Spielzüge der Natur / unbekannt (Bayesianische Spiele).
Beachte: (un)vollständige ≠ (im)perfekte Informationen!

Bei unvollständiger Information liegt dennoch eine subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Auszahlungen vor

Symmetrische-/Asymmetrische Information:
keine Informationsunterschiede / Informationsunterschiede zwischen den Spielern

Gemeinsames Wissen (common knowledge):

- Spielregeln müssen gemeinsames Wissen sein
- Rationalität des Gegenüber wird anerkannt

Strategien:
Vollständiger und kontingenter Plan, der beschreibt, wie ein Spieler in jedem denkbaren Umstand handeln würde. Also besteht eine Strategie aus Handlungen bedingt der Handlungen anderer Spieler.
Eine Strategie ist für Spieler i dann streng dominant, wenn sie seine Auszahlungen unabhängig von den Strategien der Gegner maximiert. Haben alle Spieler streng dominante Strategien, so liegt im Grunde keine Situation mit strategischer Interaktion vor.
Eine Strategie ist eine „beste Antwort", wenn es keine andere Strategie gibt, die gegeben einer gegnerischen Strategie eine höhere Auszahlung liefert.
Man sollte jede Strategie eliminieren, die niemals eine beste Antwort auf eine Strategie des Gegners ist (nicht rationalisierbare Strategien). Nach der Elimination bleiben „rationalisierbare Strategien" übrig. Das sind Strategien, die potentiell gespielt werden gegeben mindestens) einer Strategie des Gegners.
Bei einem „Nash-Gleichgewicht" spielen alle Spieler eines Spiels ihre beste Antwort. Niemand weicht von diesem Gleichgewicht, ab aber es könnte mehrere Gleichgewichte geben. Jedes Nash-Gleichgewicht muss vollständig aus rationalisierbaren Strategien bestehen. Aber nicht jede rationalisierbare Strategie führt zu einem Nash-Gleichgewicht. Eine „gemischte Strategie" ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Menge der reinen Strategien. Reine Strategien sind Spezialfälle von gemischten Strategien (mit den Wahrscheinlichkeiten 1 und 0).

- Dominante Strategien sind zwangsläufig rationalisierbare Strategien
- rationalisierbare Strategien sind nicht zwangsläufig dominante Strategien (weil es ausreicht, dass sie gegeben einer und nicht aller Handlungen des Gegenübers die beste Antwort sein müssen)
- dominierte Strategien sind zwangsläufig nicht rationalisierbare Strategien
- nicht rationalisierbare Strategien sind nicht zwangsläufig dominierte Strategien

Statische Spiele:

- Spieler ziehen gleichzeitig (simultan)
- in der extensiven Form (Baum-Diagramm) erkennt man dies daran, dass alle Entscheidungsknoten eines Spielers im gleichen Informationsbezirk liegen (=imperfekte Information)
- Strategieraum ist mit dem Handlungsraum identisch, weil es keine bedingten Entscheidungen gibt und eine Strategie nur aus einer Handlung besteht

Dynamische Spiele:

- Spieler ziehen nacheinander (sequentielle Struktur)
- Rückwärtsinduktion findet die teilspielperfekte Lösung (Gleichgewicht)
- durch Rückwärtsinduktion werden leere Drohungen eliminiert
- weil die Drohung in den späteren Teilspiel nicht mehr die optimale Handlungsalternative ist (sie ist eine leere Drohung)
- die leere Drohung/Versprechen soll den ersten Spieler dazu bringen, die Aktion zu wählen, die der folgende Spieler gerne hätte
- kann sich ein Spieler glaubwürdig an eine Strategie binden, kann es zu einer Pareto-Verbesserung führen (Bsp.: „Centipede Game")
- Die Darstellung der Normalform ist hier nur sinnvoll, wenn man statt der Handlungen des zweiten Spielers die Strategien abträgt.
- Das Ergebnis sind aber nur Nash-Gleichgewichte und keine teilspielperfekten Lösungen
- die extensive Form eignet sich eher für sequentielle Spiele

Teilspiel:
Ein Teilspiel eines Spiels in extensiver Form ist eine Teilmenge dieses Spiels (Spielbaumes) mit den folgenden Eigenschaften:

- Es beginnt mit einem Informationsbezirk, der aus genau einem Entscheidungsknoten besteht
- falls ein Entscheidungsknoten x Element des Teilspiels ist, so gilt dies auch für jedes x' Element H(x), dabei ist H(x) der Informationsbezirk der x enthält (der gleiche Informationsbezirk)
- Informationsbezirke dürfen nicht zerteilt werden
- Beispiel: In einem endlichen Spiel mit perfekter Information initiiert jeder Entscheidungsknoten ein Teilspiel
- Die hinreichende Bedingung für ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht ist ein Nash-Gleichgewicht in jedem Teilspiel.
- jedes Teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht ist ein Nash-Gleichgewicht des gesamten Spiels aber nicht umgekehrt
- jedes endliche Spiel mit perfekter Information hat mindestens ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

Moral Hazard:

- Asymmetrische Informationsverteilung
- Agent hat Informationsvorsprung
- Prinzipal hat Informationsnachteil
- Es besteht Anreiz zu Lasten des Fremdkapitalgebers in riskante Projekte zu investieren und selbst einen höheren Erwartungswert zu erzielen.
- Wohlfahrtsverluste/Pareto-Ineffizienzen sind möglich, weil wohlfahrtssteigernde Projekte nicht durchgeführt werden
- Anreiz- und Bindungsmechanismen (auch „fairness-Gedanken") zur Überwindung von Moral Hazard verändern die Pay-Off-Struktur des Spiels, sie verändern das Spiel (Bsp.: Bürgschaft des Onkels)