Quantitative Methoden der VWL **WS 06/07**
Zusammenfassungen ausgewählter Themenbereiche

Inhaltsverzeichnis

Themen: Wachstumsraten, Messzahlen, Indizes

Wachstumsraten

Die Wachstumsrate einer Größe wie beispielsweise der Bruttowertschöpfung lässt sich durch die folgende Formel berechnen: *Zusatz: Die Wachstumsrate eines Preisindex ist die Inflationsrate.*	① $wr_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$
Die Berechnung der Wachstumsrate auf diese herkömmliche Weise ist allerdings problematisch, wenn eine Verkettung der Wachstumsraten vorgenommen werden soll. Bei der Verkettung der Wachstumsrate werden Zinseszinseffekte außer Acht gelassen. Aus diesem Grund sollte man eine andere Methode verwenden um die Wachstumsraten richtig verketten zu können. Verwendet man also die Methode, die die Wachstumsrate unter Verwendung von Logarithmendifferenzen berechnet kommt man zu einem besseren Ergebnis, bei dem die Wachstumsraten auch ohne Probleme verkettet werden können. Durch die Anwendung der Taylor Approximation 1. Ordnung kommt man zu:	② $\ln(x_t) = \ln(x_t) - \ln(x_{t-1})$
Will man diese Wachstumsrate nun vom Basisjahr 0 bis zu einem bestimmten Jahr t verketten muss man die (logarithmischen) Wachstumsraten einfach aufsummieren.	③ $\boxed{wr_{\text{sum}} = wr_0 + \ldots + wr_{t-1} + wr_t}$
Hierbei muss man aber beachten, dass die so ausgerechnete Wachstumsrate eine logarithmische Wachstumsrate ist. Wenn man sie in eine „normale" Wachstumsrate überführen will gilt diese Formel:	④ $\boxed{wr_t = e^{\ln(\frac{x_t}{x_{t-1}})} - 1}$
Will man nun mithilfe einer Größe (z.B. Bruttowertschöpfung) und der dazugehörigen Wachstumsrate berechnen, wie sich die Größe entwickelt hat muss man zunächst die logarithmische Wachstumsrate in eine „normale" transformieren und dann die Wachstumsrate mit „1" addieren und mit dem Ausgangswert multiplizieren. *Wenn man also die Größe (z.B Bruttowertschöpfung), ausgehend von dem Jahr t-n, für das Jahr t berechnen will, muss man die Größe in dem Jahr t-n (z.B. Bruttowertschöpfung aus dem Jahr t-n) mit e hoch „der verketteten Wachstumsrate" multiplizieren.*	④ $\boxed{\begin{array}{l} x_t = x_0 \cdot (1 + wr_t) \\ x_t = x_0 \cdot (1 + e^{\ln(x_t)} - 1) \\ x_t = x_0 \cdot e^{\ln(x_t)} \end{array}}$

Ein Beispiel:

Jahr	*WSN3*	*WSR3*
1968	*200,66000*	*463,97000*
1969	*229,59000*	*518,48999*
1970	*259,45001*	*544,96997*

1991 (Basisjahr)	*790,66998*	*790,66998*

„Normale" Wachstumsraten:

① $$wr_{1969} = \frac{229{,}59 - 200{,}66}{200{,}66} = 0{,}14417$$

$$wr_{1970} = \frac{259{,}45001 - 229{,}59}{229{,}59} = 0{,}13006$$

③ $wr_{sum} = 0{,}14417 + 0{,}13006 = 0{,}27423$

④ $WSN3_{1970} = 200{,}66 \cdot (1 + 0{,}27423) = 255{,}68744$

Logarithmische Wachstumsraten:

② $$wr_{1969} = \ln(229{,}59) - \ln(200{,}66) = 0{,}13468$$

$$wr_{1970} = \ln(259{,}45001) - \ln(229{,}59) = 0{,}12227$$

③ $wr_{sum} = 0{,}13468 + 0{,}12227 = 0{,}25695$

④ $WSN3_{1970} = 200{,}66 \cdot e^{0{,}25695} = 259{,}45001$

(Bei den Berechnungen wurden Rundungen vorgenommen, deshalb stimmen die Ergebnisse nicht immer genau!)
Wie man sieht treten Differenzen zwischen den beiden Methoden auf. Es ist auch zu erkennen, dass die Methode der logarithmischen Differenzen wieder den exakten Wert für WSN3_1970 liefert. Es wird deutlich, dass die zweite Methode die bessere ist.

Messzahlen

Will man die zeitliche Entwicklung einer Größe wie beispielsweise der Bruttowertschöpfung oder des BIP berechnen muss lediglich eine Quotient gebildet werden. Man kann nun mit den berechneten Werten sehen, wie sich die entsprechende Größe im Zeitablauf prozentual zum Basisjahr 0 entwickelt hat. Im Basisjahr muss der Wert 1 bzw. 100% sein.	$\boxed{ws_{t,0} = \frac{WSN04_t}{WSN04_0} \cdot [100\%]}$

Deflator

Will man einen Deflator zwischen einer nominalen und realen Größe berechnen muss einfach die nominale durch die reale geteilt werden. Es ergibt sich beispielsweise der Wertschöpfungsdeflator. Dieser Deflator ist gleichzeitig der Paasche Preisindex. Das Basisjahr des Deflators (in diesem Beispiel 1991) richtet sich nach dem Basisjahr der realen Göße (WSR in Preisen von 1991). Im Basisjahr muss der Index 1 sein.	① $\boxed{PW\ S91=\frac{WSN}{WSR}=\frac{\sum_{i=1}^{10} p_i(t)\,q_i(t)}{\sum_{i=1}^{10} p_i(0)\,q_i(t)}=Paasche\ Ind.}$
Will man aber ein anderes Jahr als Basisjahr festlegen ist es leicht möglich eine Umbasierung vorzunehmen (hier: von 1991 zu 1985) indem man einen Quotienten bildet. Man bekommt also den Deflator für das neue Jahr 1985 indem man jeweils alle Deflatoren mit dem Basisjahr 1991 durch den Wert teilt, den der Deflator (zum alten Basisjahr)1985 hat. Im neuen Basisjahr muss der Index auch 1 sein.	② $\boxed{PW\ S68=\frac{PW\ S91}{PW\ S91(68)}}$

Ein Beispiel (für die Daten siehe oben):

①

$$PW\ S91(68)=\frac{200{,}66}{463{,}97}=0{,}43248$$

$$PW\ S91(69)=\frac{463{,}97}{518{,}48999}=0{,}44281$$

$$PW\ S91(70)=\frac{518{,}48999}{544{,}96997}=0{,}47608$$

$$PW\ S91(91)=\frac{790{,}66998}{790{,}66998}=1(auch\ per\ Definition)$$

---

②

$$PW\ S68(68)=\frac{0{,}43248}{0{,}43248}=1(auch\ per\ Definition)$$

$$PW\ S68(69)=\frac{0{,}44281}{0{,}43248}=1{,}02389$$

$$PW\ S68(70)=\frac{0{,}47608}{0{,}43248}=1{,}10081$$

Indizes

Der Paasche-Index mit dem Basisjahr 0 und dem Betrachtungsjahr t berechnet sich wie folgt:	$I_{0,t}^{P}=\frac{\sum_{i}^{10} p_i(t)\,q_i(t)}{\sum_{i}^{10} p_i(0)\,q_i(t)}$
Bei den Daten, die in der Regel in TSP gegeben sind muss die Formel so interpretiert werden:	$I_{85,t}^{P}=\frac{\sum_{i}^{10} p_i(t)\,q_i(t)}{\sum_{i}^{10} p_i(t)\,q_i(t)}=\frac{PW\ S91\cdot WSR}{PW\ S91(85)\cdot WSR}$
Der Laspeyres-Index mit dem Basisjahr 0 und dem Betrachtungsjahr t berechnet sich wie folgt:	$I_{0,t}^{L}=\frac{\sum_{i}^{10} p_i(t)\,q_i(0)}{\sum_{i}^{10} p_i(0)\,q_i(0)}$
Bei den Daten, die in der Regel in TSP gegeben sind muss die Formel so interpretiert werden:	$I_{85,t}^{L}=\frac{\sum_{i}^{10} p_i(t)\,q_i(0)}{\sum_{i}^{10} p_i(0)\,q_i(0)}=\frac{PW\ S91\cdot WSR(85)}{PW\ S91(85)\cdot WSR(85)}$

Zur Notation

wr_t	*Wachstumsrate vom Jahr t-1 zum Jahr t*
$x_t\,bzw.\,x_{t-1}$	*Eine Größe wie beispielsweise das reale/nominale BIP oder die reale/nominale Wertschöpfung*
$PW\ S91$	*Deflator für jedes Jahr (Zeitreihe) mit dem Basisjahr 1991*
$PW\ S85$	*Deflator für jedes Jahr (Zeitreihe) mit dem Basisjahr 1985*
$PW\ S91(85)$	*Ein bestimmter Wert des Deflators also keine Zeitreihe (hier: für 1985)auch mit dem Basisjahr 1991*
$I_{0,t}^{L}\,oder\,I_{0,t}^{P}$	*Laspeyres bzw. Paasche Index zum Jahr t mit dem Basisjahr 0*

Themen: Indizes

SVR Revision
neue Methode der Indexberechnung (Sachverständigenratsgutachten)

<table>
<tr><td colspan="2">Die Berechnung von Indizes ist problematisch, denn keine Methode, weder der Laspeyres noch der Paasche Index, ist fehlerlos (gegen über/unterschätzen). Das größte Problem liegt aber in der Tatsache, dass Indizes und dann auch deren Wachstumsraten von dem gewählten Basisjahr abhängen, d.h. dass die Wachstumsrate des Preisindex von 2003 zu 2004 anders sein kann, je nachdem welches Basisjahr verwendet wurde. Aus diesem Grund hat der Sachverständigenrat in seinem Gutachten das folgende neue Verfahren verwendet.</td></tr>
<tr><td>Man beginnt indem man den Mengenindex (in dem Beispiel Laspeyres) zu den Jahren der betrachteten Perioden bildet. Dabei ist zu beachten, dass das Basisjahr (-periode) immer das Vorjahr ist. Man ändert also stets die Basisperiode und hält sie nicht, wie sonst üblich, konstant.</td><td>① $I^{L}_{t-1,t}=\frac{\sum_{i=1}^{10} p_i(t-1)\,q_i(t)}{\sum_{j=1}^{10} p_j(t-1)\,q_j(t-1)}$</td></tr>
<tr><td>Im folgenden Schritt werden die Indizes verkettet indem man sie aufmultipliziert. Damit erhält man nun den neuen Index. (Die Wachstumsrate dieses Index ist bereits unabhängig vom Basisjahr).</td><td>② $I^{C}_{0,t}=\prod_{j=1}^{t} I^{L}_{j-1,j}=I^{L}_{0,1}\cdot\ldots\cdot I^{L}_{t-1,t}$</td></tr>
<tr><td>Nun kann das reale BIP mithilfe dieses Index berechnet werden. Man multipliziert den Index (für das jeweilige Jahr t das man berechnen will) mit dem BIP des selbst gewählten Basisjahres 0 und bekommt damit das BIP auf Basis des Kettenindizes. Dieses wird nun für mehrere Jahre berechnet.</td><td>③ $BIP^{R}_{t}=BIP^{R}_{0}\cdot I^{C}_{0,t}$</td></tr>
<tr><td>Berechnet man nun die Wachstumsrate dieses neu berechneten BIPs, findet man heraus, dass die Wachstumsraten gleich sind, egal welche Periode als Basisperiode gewählt wurde.</td><td>④ $wr_t=\frac{x_t-x_{t-1}}{x_{t-1}}$</td></tr>
<tr><td>Wenn man nun noch die Wachstumsrate des Preisindex (Inflationsrate) berechnen will, die unabhängig vom Basisjahr ist muss man zunächst auf die übliche Weise den BIP Deflator berechnen. Man nimmt dazu das nominale BIP und das selbst berechnete reale BIP (siehe ③).</td><td>⑤ $BIP\ Deflator=\frac{BIP^{N}}{BIP^{R}_{berechnet}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Berechnet man davon die Wachstumsrate ④ ergibt sich, dass die Wachstumsrate dieses Preisindex gleich ist, egal welches Basisjahr verwendet wurde.</td></tr>
</table>

Ein Beispiel:
herkömmliche Berechnung:

nominales und reales BIP			
	2002	*2003*	*2004*
BIP^{N}	*25.000*	*40.000*	*54.000*
BIP^{R}_{02}	*25.000*	*31.000*	*39.000*
BIP^{R}_{03}	*33.000*	*40.000*	*50.000*

BIP^R_{04}		*43.100*	*54.000*

Wachstumsrate des realen BIP		
	2003	*2004*
zum Basisjahr 2002	*0,24*	*0,26*
zum Basisjahr 2003	*0,25*	*0,25*

④ $wr_{2004}=\frac{39.000-31.000}{31.000}=0{,}26$ $\qquad$ $wr_{2004}=\frac{50.000-40.000}{40.000}=0{,}25$

Man sieht, dass die Wachstumsraten des realen BIP unterscheiden, je nachdem ob man das Basisjahr 2002 oder 2003 verwendet. Gleiches würde sich bei der Berechnung der Inflationsrate ergeben.

Berechnung mit neuer Methode:

Mengenindizes auf Basis von Laspeyres (mit dem Vorjahr als Basisjahr)		
	2003	*2004*
I^M_L	*1,24*	*1,25*

$$I^L_{02,03}=\frac{\sum_{i=1}^{10} p_i(2002)\,q_i(2003)}{\sum_{j=1}^{10} p_j(2002)\,q_j(2002)}=\frac{BIP^R_{02,03}}{BIP^N_{02}}=\frac{31.000}{25.000}=1{,}24$$

①

$$I^L_{03,04}=\frac{\sum_{i=1}^{10} p_i(2003)\,q_i(2004)}{\sum_{j=1}^{10} p_j(2003)\,q_j(2003)}=\frac{BIP^R_{03,04}}{BIP^N_{03}}=\frac{50.000}{40.000}=1{,}25$$

Verkettung der Mengenindizes			
	2002	*2003*	*2004*
zum Basisjahr 2002	*1*	*1,24*	*1,55*
zum Basisjahr 2003		*1*	*1,25*

②
$$I^C_{02,02}=1$$
$$I^C_{02,03}=1\cdot 1{,}24=1{,}24$$
$$I^C_{02,04}=1\cdot 1{,}24\cdot 1{,}25=1{,}55$$

②
$$I^C_{03,03}=1$$
$$I^C_{03,04}=1\cdot 1{,}25=1{,}25$$

neu berechnetes reales BIP auf Basis des Kettenindex

	2002	2003	2004
zum Basisjahr 2002	25.000	31.000	38.750
zum Basisjahr 2003		40.000	50.000

③ reales BIP zur Basis 2002

$$BIP_{02}^{R}=25.000\cdot 1=25.000$$
$$BIP_{03}^{R}=25.000\cdot 1{,}24=31.000$$
$$BIP_{04}^{R}=25.000\cdot 1{,}55=38.750$$

③ reales BIP zur Basis 2003

$$BIP_{03}^{R}=40.000\cdot 1=40.000$$
$$BIP_{04}^{R}=40.000\cdot 1{,}25=50.000$$

Wachstumsrate des realen BIPs auf Basis der Kettenindizes		
	2003	2004
zum Basisjahr 2002	0,24	0,25
zum Basisjahr 2003		0,25

Die Wachstumsraten des realen BIPs sind trotz verschiedener Basisjahre identisch (25%).

④
$$wr_{03}=\frac{31.000-25.000}{25.000}=0{,}24$$
$$wr_{04}=\frac{38.750-31.000}{31.000}=0{,}25$$

④
$$wr_{04}=\frac{50.000-40.000}{40.000}=0{,}25$$

BIP Deflator auf Basis der Kettenindizes			
	2002	2003	2004
zum Basisjahr 2002	1	1,29	1,394
zum Basisjahr 2003		1	1,08

⑤
$$I_{02}^{P}=\frac{25.000}{25.000}=1$$
$$I_{03}^{P}=\frac{40.000}{31.000}=1{,}29$$
$$I_{04}^{P}=\frac{54.000}{38.750}=1{,}394$$

⑤
$$I_{03}^{P}=\frac{40.000}{40.000}=1$$
$$I_{04}^{P}=\frac{54.000}{50.000}=1{,}08$$

Inflationsrate auf Basis der Kettenpreisindizes		
	2003	2004
zum Basisjahr 2002	0,29	0,08
zum Basisjahr 2003		0,08

Die Wachstumsraten des Preisindex sind trotz verschiedener Basisjahre identisch (8%).

④ $$wr_{03} = \frac{1{,}29 - 1}{1} = 0{,}29$$
$$wr_{03} = \frac{1{,}394 - 1{,}29}{1{,}29} = 0{,}08$$

④ $$wr_{04} = \frac{1{,}08 - 1}{1} = 0{,}08$$

Themen: Input-Output-Tabelle, Input-Output-Analyse

Input-Output-Tabelle

Schema einer Input-Output-Tabelle

	Vorleistungen			$\sum$	*Endnachfrage*				$\sum$	*Total*
	1	*2*	*3*		*I*	*C*	*G*	*EX*		X_i
Sektor 1	X_{11}	X_{12}	X_{13}		I_1	C_1	G_1	EX_1		X_1
Sektor 2	X_{21}	X_{22}	X_{23}		I_2	C_2	G_2	EX_2		X_2
Sektor 3	X_{31}	X_{32}	X_{33}		I_3	C_3	G_3	EX_3		X_3
$\sum$										
Abschr.	D_1	D_2	D_3							
Löhne	W_1	W_2	W_3							
Zinsen	Z_1	Z_2	Z_3							
Importe	IM_1	IM_2	IM_3							
Steuern	T_1	T_2	T_3							
$\sum$										
Total (X_j)	X_1	X_2	X_3							

Verwendungsseite

Entstehungsseite

Die Input-Output-Tabelle ist folgendermaßen aufgebaut:
Im ersten Quadranten sind alle inländischen Vorleistungen erfasst. Hier wird die wirtschaftliche Verflechtung zwischen den Sektoren der gesamten Volkswirtschaft dargestellt. Die Elemente X_{ij} *geben an, wie viele Vorleistungen der Sektor i an den Sektor j geliefert bzw. verkauft hat. Man nennt diesen ersten Quadranten auch Vorleistungsmatrix.*
Im zweiten Quadranten steht die gesamtwirtschaftliche Endnachfrage (Verwendung) nach inländischen Gütern. Für die Komponenten der Endnachfrage werden hier die in der Makroökonomie üblichen Variablennamen C, I, G und EX verwendet. Jedes Element gibt an, wie viel eine Komponente der Endnachfrage vom jeweiligen Sektor nachfragt (verbraucht). So gibt beispielsweise C_2 *die Menge an, die der private Konsum von Sektor 2 verbraucht. Dieser Quadrant wird Endnachfragematrix genannt.*
Der dritte Quadrant gibt die primären Inputs an. Abschreibungen, Löhne, Zinsen, Importe und Nettosteuern fließen in die Bruttoproduktion ein und werden hier in der Primär-Input-Matrix erfasst.
Man versucht die einzelnen Sektoren so anzuordnen, dass die Vorleistungsmatrix einer Dreiecksmatrix nahe kommt, d.h. dass die Masse oberhalb der Hauptdiagonalen liegt. Das vereinfacht teilweise die Analyse.

Mit der Input-Output-Tabelle ist es möglich das BIP auf drei verschieden Arten zu berechnen:

1. ***Produktionsansatz:***

   $$\boxed{BIP = Bruttoproduktionswert - Vorleistungen + Nettogütersteuern}$$

   Der Bruttoproduktionswert ist die Summe der einzelnen Bruttoproduktionswerte X_j *(bzw. X). Die Vorleistungen beziehen sich auf Vorleistungen aus inländischer Produktion und*

Vorleistungen aus Importen. Die Nettogütersteuern sind die Gütersteuern abzüglich Gütersubventionen.

2. ***Ausgabenansatz (Verwendungsseite):***
   $\boxed{BIP = C + I + G(+Vorratsveränderungen) + EX - IM}$
   Der Ausgabenansatz berechnet das BIP anhand der Nachfrage (bzw. Verwendung) nach Gütern. Die Komponenten C + I + G (+Vorratsveränderung) + EX geben die letzte Verwendung (Nachfrage) der Güter inklusive der importierten Güter wider. Die Importe müssen dann noch abgezogen werden.
3. ***Einkommensansatz (Entstehungsseite):***
   $\boxed{BIP = \sum Bruttowertschöpfungen + Nettogütersteuer + Einfuhrabgaben}$
   Bruttowertschöpfungen sind beispielsweise Arbeitnehmerentgelt, Abschreibungen, sonstige Nettoproduktionsabgeben oder Nettobetriebsüberschüsse.

Summiert man eine ganze Zeile auf, bekommt man den Bruttoproduktionswert des Sektors i (X_i) über die „Verwendungsseite". Berechnet man X_i auf diese Weise, bekommt man als Ergebnis wie viele Güter insgesamt von diesem Sektor i nachgefragt wurden. Man bezieht auch die Nachfrage der anderen Sektoren (Vorleistungsmatrix) mit ein.
$\text{Beispiel für ersten Sektor}: X_{11} + \cdots + X_{1n} + Y_1 = X_1$ *Wobei Y für den Endnachfragevektor steht.*
Den gleichen Wert erhält man, wenn man die Spalte eines Sektors aufsummiert. Die Interpretation über die „Entstehungsseite" ist, dass man die Summe dessen bekommt, was insgesamt von diesem Sektor j produziert wurde. Mit eingerechnet werden die Produkte, die an andere Sektoren geliefert wurden (Vorleistungsmatrix)
$\text{Beispiel für ersten Sektor}: X_{11} + \cdots + X_{n1} + Wertschöpfungen = X_1$

Input-Output-Analyse

<table>
<tr><td colspan="2">Für diese Analyse muss man eine feste Produktionsstruktur unterstellen. Das bedeutet, dass man bei doppeltem Output auch doppelten Input haben muss. Man hat also eine lineare Produktionsfunktion. Konkret bedeutet das, dass sich die a_{ij} nicht mit dem Outputniveau verändern. Man muss auch bedenken, dass man unterstellt, dass alle Importe zu 100% aus ausländischer Wertschöpfung stammen. Das ist eine unrealistische Annahme, die dazu führt, dass alle Importgrößen eine Obergrenze darstellen und nicht den exakten Wert abbilden.</td></tr>
<tr><td>Man kann sich überlegen, dass der Bruttoproduktionswert auch berechnet werden kann, indem man unterstellt, dass jede Vorleistung einen bestimmten Anteil a_{ij} an dem gesamten Bruttoproduktionswert darstellt. Das heißt, dass jedes X_{ij} auch als $a_{ij} \cdot X_i$ dargestellt werden kann. a_{ij} ist also der Inputkoeffizient, der angibt, welcher Anteil des Bruttoproduktionswertes auf das Element X_{ij} der Votleistungsmatrix entfällt. Man kann diesen Anteil berechnen, indem man das entsprechende X_{ij} durch das zugehörige X_j (ganz unten in der Tabelle, in der gleichen Spalte) teilt.</td><td>① $\boxed{\begin{array}{c} a_{11} X_1 + \cdots a_{1n} X_n + Y_1 = X_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} X_1 + \cdots a_{nn} X_n + Y_n = X_n \\ \\ wobei \quad a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \end{array}}$</td></tr>
<tr><td>① kann auch in Matrixschreibweise wiedergegeben werden, wobei A die Matrix der</td><td>② $\boxed{AX + Y = X}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Inputkoeffizienten darstellt, Y der Nachfragevektor und X der Vektor der Bruttoproduktionswerte ist.</td><td></td></tr>
<tr><td>Die beiden Vektoren und die Matrix A sind folgendermaßen definiert:</td><td>③ $X=\begin{pmatrix}X_1\\ .\\ .\\ .\\ X_n\end{pmatrix}\quad Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ .\\ .\\ .\\ Y_n\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Durch einige Umformungen der Matrixgleichung erhält man diese neue Gleichung, mit der der Bruttoproduktionswert in Abhängigkeit eines gegebenen Vektors Y berechnet werden kann. I ist dabei die n×n Einheitsmatrix. Die Inverse (I-A)⁻¹ ist die „Leontief-Inverse“.</td><td>④ $X=\underbrace{(I-A)^{-1}}_{\text{Leontief}-\text{Inverse}}Y$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Man kann nun die Volkswirtschaft mit der Input-Output-Tabelle analysieren und damit die Leontief-Inverse berechnen. Mit dieser Inversen lässt sich nun für jeden gegebenen Nachfragevektor Y der Vektor der Bruttoproduktionswerte X berechnen. Wenn man diesen Vektor dann berechnet hat, kann man mit der Inputkoeffizientenmatrix A dann die Volrleistungsmatrix bestimmen.</td></tr>
<tr><td>Man kann nun analog zur Matrix A eine Matrix der Primärinputkoeffizienten P definieren. Zur weiteren Analyse muss angenommen werden, dass die Abschreibungn, Löhne/Gehälter, Zinsen, Importe (es muss sich dabei um importierte Vorleistungen handeln!) und Steuern auch (wie die Vorleistungsmatrix) proportional zum Bruttoproduktionwert sind. Aus diesem Grund kann auch analysiert werden, wie sich die Komponenten der Primär-Input-Matrix verändern. Man berechnet dann wie zuvor per Leontief-Inverse mit (gegebenem) Nachfragevektor Y den Vektor der Bruttoproduktionswerte. Wenn man nun die neuen Werte für die Primär-Input-Matrix berechnen will, muss man die Matrix P mit dem Spaltenvektor X von rechts multiplizieren.</td><td>⑤ $P=\begin{pmatrix}d_1 & \cdots & d_n\\ w_1 & \cdots & w_n\\ z_1 & \cdots & z_n\\ im_1 & \cdots & im_n\\ t_1 & \cdots & t_n\end{pmatrix}$
wobei $d_j=\frac{D_j}{X_j}\quad w_j=\frac{W_j}{X_j}\quad z_j=\frac{Z_j}{X_j}$
$im_j=\frac{IM_j}{X_j}\quad t_j=\frac{T_j}{X_j}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zur Bewertung der Exporte einer Volkswirtschaft können einige Koeffizienten berechnet werden, die Aussagen, wie groß der Anteil der Importe an den Exporten ist. Mit diesen Koeffizienten lassen sich dann u.a. Aussagen zum Thema „Basarökonomie“ machen. Dazu ist eine entsprechend detaillierte Input-Output-Tabelle von Nöten. Dabei muss man die Begriffe „Exportinduzierte importierte Vorleistungen“, „Exporte importierter Güter“ und „Exportinduzierten Importe“ genau trennen. Eine Erklärung folgt weiter unten.</td></tr>
<tr><td>Wenn man analysieren will, wie groß der Anteil der Importe an den Exporten ist muss man zunächst die „exportinduzierten importierten</td><td>⑥ $z_1=p_1\underbrace{(I-A)^{-1}e}_{\text{Produktionswert Export}}$</td></tr>
</table>

Vorleistungen" berechnen. Das sind die Güter die als Vorleistungen importiert werden, dann weiterverarbeitet und dann wieder exportiert werden. Der „Produktionswert Export" (siehe Formel links) ist der Produktionswert, der in den Export geht. Wird dieser mit dem Vektor p_1 multipliziert ergibt das die exportinduzierten importierten Vorleistungen. Dabei geben die Elemente des Vektors p_1 an, wie viel importierte Vorleistungen zur Produktion einer Einheit des Exportguts benötigt werden. e ist der Spaltenvektor der Exporte (Exporte aller Sektoren als Vektorelemente).	
Als nächstes muss man diese „Exportinduzierten importierten Vorleistungen" mit dem „Exporten importierter Güter" (müssen in der Input-Output-Tabelle gegeben sein) addieren. Das sind die Güter, die importiert, nicht verändert, und wieder exportiert wurden. Man erhält dann die „Exportinduzierten Importe". Diese können zu den gesamten Exporten in Relation gesetzt werden, so dass man sich ein Bild darüber machen kann, ob die Exporte mehrheitlich auf die importierten Vorleistungen und die Importe zurückzuführen sind und weniger in der inländischen Bruttowertschöpfung begründet sind.	
Auf ähnliche Weise lässt sich auch berechnen, wie groß der Anteil der inländischen Bruttowertschöpfungen an den Exporten ist dazu verwendet man lediglich den Vektor p_2, der angibt, wie viel inländische Bruttowertschöpfung zur Produktion einer Einheit des Exportguts benötigt wird. z_2 ist dann die „Exportinduzierte inländische Bruttowertschöpfung", diese kann in wie z_1 auch in Relation zu den Exporten gesetzt werden.	⑦ $\boxed{z_2 = p_2 (I - A)^{-1} e}$
Es ist zur Analyse auch möglich die Wachstumsraten der Exportinduzierten Importe oder auch der Exportinduzierten inländischen Bruttowertschöpfung mit der Wachstumsrate des BIPs zu vergleichen.	

Einiges zum gewählten Beispiel (Input-Output-Tabelle oben):
Die Tabelle hier ist beispielhaft erstellt für eine Volkswirtschaft, die in drei Sektoren eingeteilt ist. Es ist natürlich auch möglich eine Volkswortschaft in mehr als drei Sektoren einzuteilen bzw. eine allgemeine Tabelle für n Sektoren anzugeben, allerdings reicht es zur Veranschaulichung aus hier den Sonderfall der „drei Sektoren" anzunehmen.
Es ist nicht notwendig die hier angegebenen Zwischensummen zu bilden, in der Praxis wird das allerdings häufig gemacht, um die Analyse zu vereinfachen.
Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten die Vorleistungsmatrix zu erstellen. Bei der einen Methode werden die Intrasektorenströme erfasst bei der anderen nicht. Wenn diese nicht erfasst werden ist dies dadurch zu erkennen, dass auf der Hauptdiagonalen der Matrix jeweils eine „0" steht.

Es ist auch möglich andere Input-Output-Tabellen zu erstellen, so kann man z.B. statt der Sektoren *auch Regionen oder Länder einsetzen, so dass man die Verflechtung zwischen den Regionen bzw. zwischen den Ländern darstellt.*

Themen: Multivariate Regression

Regressionskoeffizienten (Berechnung, Interpretation, Tests und Interpretation der Tests)

Man unterstellt folgenden linearen Zusammenhang zwischen einer abhängigen Variable Y_i und mehrerer Variablen X_{ij}. u_i gibt den Fehlerterm an, da nicht alle Beobachtungen auf der unterstellten Geraden liegen werden. Man minimiert nun die Fehlerquadrate u_i^2 bezüglich der β. (Formel in Summen und Matrixschreibweise)	① $Y_i=\beta_1+\beta_2\cdot X_{i1}+\ldots+\beta_k\cdot X_{ik}+u_i$ $y=X\beta+u$
Aus den Bedingungen erster Ordnung, die man durch die Minimierung der Fehlerquadrate u_i^2 erhält, kann man den Schätzer für den Vektor β herleiten. Man sieht, dass die Kleinst-Quadrate-Schätzer (für β) angeben, wie sich die abhängige Variable Y verhält wenn sich die Variable X ändert (Cov(X,Y)). Der Effekt wird aber korrigiert um die eigene Streuung (Var(X)). Insgesamt erhält man mit β_j den ceteris paribus Effekt der Variablen X_j oder auch die partielle Ableitung nach der Variablen X_j. Es besteht gewisse Ähnlichkeit zum Korrelationskoeffizienten. (Formel in Summen und Matrixschreibweise)	② $\hat{\beta}=(\sum_{i=1}^{N} X_i X_i')^{-1}\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i$ $\hat{\beta}=\underbrace{(X'X)^{-1}}_{Var(X)}\underbrace{X'y}_{Cov(X,Y)}$ $\beta_j=\frac{\delta Y}{\delta X_j}$
Mit den Berechneten Koeffizienten können nun diverse Tests durchgeführt werden. Dabei können Hypothesen bezüglich der Regrssoren (X_i) statistisch getestet werden. Wir gehen in unseren Tests in der Regel davon aus, dass das Signifikanzniveau α=0,05 bzw. 5% ist (es wären auch andere Niveaus möglich).	
*Test auf Signifikanz **eines** Regressors X_j: In der Nullhypothese wird unterstellt, dass der Regressor X_j keinen linearen Einfluss auf das Y_i hat, oder anders ausgedrückt, es wird getestet ob der zugehörige Regressionskeoffizient β_j gleich Null ist. Bei Statistikprogrammen wie TSP wird in der Regel der P-Value ausgegeben. Wir lehnen die Hypothese für zu kleine Werte (P-Value < α) ab, für zu große Werte können wir die Hypothese nicht verwerfen. Wenn wir die Hypothese beibehalten bedeutet das, dass X_j keinen signifikanten Einfluss auf Y_i hat (also β_j ist nicht signifikant verschieden von Null). Wenn wir die Hypothese ablehnen ist das β_j signifikant von Null verschieden, das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass X_j einen signifikanten Einfluss auf Y_i hat.*	③ $H_0: \beta_j=0 \quad H_1: \beta_j\neq 0$ $t=\frac{\hat{\beta}_j-0}{s_{\hat{\beta}_j}}=\frac{\hat{\beta}_j}{s\sqrt{a_{ij}}}$

Test auf Signifikanz mehrerer Restriktionen: *Mit diesem Test ist es möglich herauszufinden, ob mehrere Restriktionen zusammen einen signifikanten Einfluss auf die zu erklärende Variable haben. Dabei sind verschiedene Möglichkeiten denkbar. Z.B. die obere Alternative, bei der gleichzeitig getestet wird, ob β_2 einen Einfluss hat und ob $\beta_4+\beta_5=1$ sind.* *Oft wird aber wie in der unteren Alternative getestet ob mehrere Regressoren zusammen einen Einfluss auf Y haben (signifikant sind). Wenn man den Test ablehnt ist mindestens ein Regressor signifikant.*	④ $H_0: \begin{pmatrix} \beta_2=0 \\ \beta_4+\beta_5=1 \end{pmatrix} \quad H_1: nicht$ $H_0: \begin{pmatrix} \beta_2=0 \\ \beta_3=0 \\ \vdots \\ \beta_n=0 \end{pmatrix} \quad H_1: nicht$
Es ist möglich diesen Test allgemein und in Matrix Schreibweise anzugeben. Wobei R ein (m×k) Matrix und r ein (m×1) Spaltenvektor ist. *Den Spezialfall, dass drei β = 0 sind, kann man auch allgemein mit Matrixschreibweise angeben. Dabei müssen die Matrix R und der Vektor r definiert werden.*	④ $H_0: R\beta=r$ $X=(R\hat{\beta}-r)'[R\hat{Var}(\hat{\beta})R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)$ ④ $H_0: \beta_h=\beta_j=\beta_l \;=\; H_0: R\beta=r$ $R=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $r=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
Test auf Gleichheit von mindestens zwei Regressoren: *Es ist mögliche mehrere Regressoren simultan zu testen, man verwendet dann die obere Nullhypothese. Bei unseren Testproblemen beschränken sich die Tests auf mehrere Regressoren lediglich auf die Tests auf Gleichheit. Will man testen, ob zwei Regressoren den gleichen Einfluss haben kann man als Spezialfall des oberen den unteren Test verwenden.* *Die Varianz der Schätzer von (β_i-β_j) muss mit den beiden Varianzen und der Kovarianz der beiden Schätzer berechnet werden. Dabei müssen die richtigen Elemente aus der Varianz-Kovarianz Matrix heraus gesucht werden. σ steht dabei für die Standardabweichung der Regression und die „as" kennzeichnen die Elemente der Varianz-Kovarianz Matrix.*	⑤ $H_0: r_1\beta_1+r_2\beta_2+\dots+r_n\beta_n=r$ $t=\frac{r_1\hat{\beta}_1+r_2\hat{\beta}_2+\dots+r_n\hat{\beta}_n-r}{\sqrt{\hat{Var}(r_1\beta_1+r_2\beta_2+\dots+r_n\beta_n)}}$ ⑤ $H_0: \beta_i-\beta_j=0$ $t=\frac{(\hat{\beta}_i-\hat{\beta}_j)-0}{\hat{Var}(\hat{\beta}_i-\hat{\beta}_j)}$ $=\frac{\hat{\beta}_i-\hat{\beta}_j}{\hat{Var}(\hat{\beta}_i)+\hat{Var}(\hat{\beta}_j)-2\hat{Cov}(\beta_i,\beta_j)}$ $=\frac{\hat{\beta}_i-\hat{\beta}_j}{\sigma^2\cdot a_{ii}+\sigma^2\cdot a_{jj}-2\sigma^2\cdot a_{ij}}$
Varianz-Kovarianz Matrix für den Spezialfall von drei Regressoren. Es ist zu beachten, dass die Matrix symmetrisch ist, d.h. Cov(β_1,β_2) = Cov(β_2,β_1) usw.	

⑥	$Var(\hat{\beta})=\begin{pmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_{1,}\hat{\beta}_2) & Cov(\hat{\beta}_{1,}\hat{\beta}_3) \\ Cov(\hat{\beta}_{2,}\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) & Cov(\hat{\beta}_{2,}\hat{\beta}_3) \\ Cov(\hat{\beta}_{3,}\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_{3,}\hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_3) \end{pmatrix}$
Die Teststatistik „t“ ist t(N-k)-verteilt, bei großen Stichproben gilt allerdings, dass t asymptotisch standardnormalverteilt ist. *Die Teststatistik „X“ ist asymptotisch $\chi^2(m)$-verteilt*	

Regressionsbeispiel 1:

```
                         Equation   3
                         ============

               Method of estimation = Ordinary Least Squares

Dependent variable: LNLOHN
Current sample:  1 to 2741
Number of observations:  2741

       Mean of dep. var. = 7.63954      LM het. test = 7.04812 [.008]
  Std. dev. of dep. var. = .795992     Durbin-Watson = 2.10560 [<.998]
Sum of squared residuals = 1505.12  Jarque-Bera test = 1413.21 [.000]
   Variance of residuals = .550119   Ramsey's RESET2 = 4.37384 [.037]
Std. error of regression = .741700   F (zero slopes) = 104.953 [.000]
               R-squared = .133028    Schwarz B.I.C. = 3087.56
      Adjusted R-squared = .131761    Log likelihood = -3067.77

            Estimated     Standard
Variable    Coefficient     Error          t-statistic   P-value
C           5.77856       .128837          44.8519       [.000]
DAUER       .107995       .554866E-02      19.4633       [.000]
ERFAHRUNG   .040377       .015757          2.56243       [.010]
ERF2        -.615483E-03  .711448E-03      -.865113      [.387]
ERF3        -.959965E-06  .964063E-05      -.099575      [.921]
```

abhängige Variable (Y)

P-Value für den Signifikanztest ③ der variablen „Dauer“ → ablehnen → signifikant

Standardabweichung der Variablen „Erfahrung“

β_3: Koeffizient der Variablen „Erfahrung“ ②

C = Absolutglied

Es handelt sich hier um eine Regression mit vier Regressoren, die die abhängige Variable „LNLOHN“ erklären sollen. Es wurde der Kleinst-Quadrate-Schätzer verwendet. Das Modell das zugrunde liegt sieht so aus:

$$LNLOHN=\beta_1+\beta_2\cdot DAUER+\beta_3\cdot ERFAHRUNG+\beta_4\cdot ERF2+\beta_5\cdot ERF3$$

In diesem Fall wurde die abhängige Variable (LNLOHN) mehrmals auf ERFAHRUNG regressiert, denn ERF2 = ERFAHRUNG^2 und ERF3 = ERFHRUNG^3. Das führt dazu, dass der ceteris paribus Effekt der Variablen ERFAHRUNG also die partielle Ableitung danach nicht mehr so einfach ist, wie wenn man lediglich lineare Faktoren hat:

$$\frac{\delta\, LNLOHN}{\delta\, ERFAHRUNG} = \beta_3 + 2\cdot\beta_4\cdot ERFAHRUNG + 3\cdot\beta_5\cdot ERF2$$

Es folgen einige exemplarische Hypothesentest, die theoretisch in der Tabelle oben aufgeführt sind:

```
frml test31 erfahrung;
frml test32 erf2;
frml test33 erf3;
title 'Test, ob nur linearer Einfluss von Erfahrung';
analyz(noconstr) test32 test33;
```

Testet, ob „ERF2“ signifikant ist ③

Testet, ob „ERF3“ signifikant ist ③

Testet, ob nur linearer Einfluss besteht ④

```
                    Test, ob nur linearer Einfluss von Erfahrung
                    ============================================
                            Results of Parameter Analysis
                            =============================

              Estimated      Standard
Parameter     Estimate         Error         t-statistic    P-value
TEST32       -.615483E-03   .711448E-03     -.865113       [.387]
TEST33       -.959965E-06   .964063E-05     -.099575       [.921]

Wald Test for the Hypothesis that the given set of Parameters are jointly zero:

CHISQ(2) =    35.029465      ; P-value = 0.00000

F Test for the Hypothesis that the given set of Parameters are jointly zero:

F(2,2736)     =    17.514732      ; P-value = 0.00000
```

„ERF2“ und „ERF3“ sind allein nicht signifikant ③

Testet, ob nur linearer Einfluss besteht ④

Man testet, ob ERF2 und ERF3 zusammen (siehe Test ④) keinen Einfluss auf LNLOHN haben. Wenn diese Hypothese abgelehnt wird (wie hier) bedeutet das, dass durchaus ein Einfluss der beiden Variablen ERF2 und ERF3 signifikant erkennbar ist. Das bedeutet gleichzeitig, dass die lineare Variable ERFAHRUNG allein LNLOHN nicht erklären kann, denn es besteht auch ein gemeinsamer Einfluss der quadratischen Variablen ERF2 und der kubischen Variablen ERF3.

Regressionsbeispiel 2:

Mit folgendem Test wurde überprüft, ob die Variablen „DAUER“ und „EX“ den gleichen Einfluss haben ⑤ und ob nur linearer Einfluss von „EX“ bzw. kein quadratischer Einfluss von EX besteht.

```
frml test2 ex2;
frml test4 dauer-ex;
analyz(noconstr) test2 test4;
```

```
                                   Equation   1
                                   ============

                      Method of estimation = Ordinary Least Squares


 Dependent variable: LNLOHN
 Current sample:  1 to 1747
 Number of observations:  1747
```

```
       Mean of dep. var. = 8.43392      LM het. test = 34.4470 [.000]
    Std. dev. of dep. var. = .598904     Durbin-Watson = 1.89750 [<.021]
Sum of squared residuals = 409.755  Jarque-Bera test = 3559.44 [.000]
   Variance of residuals = .235086   Ramsey's RESET2 = 10.4337 [.001]
Std. error of regression = .484857   F (zero slopes) = 306.994 [.000]
               R-squared = .345716    Schwarz B.I.C. = 1227.16
      Adjusted R-squared = .344590    Log likelihood = -1212.23

           Estimated     Standard
Variable   Coefficient     Error          t-statistic    P-value
C          6.43869       .068177          94.4406        [.000]
DAUER      .076360       .409965E-02      18.6260        [.000]
EX         .092683       .417777E-02      22.1847        [.000]
EX2        -.157516E-02  .849791E-04      -18.5358       [.000]

               Gemeinsamer Test, ob nur linearer Einfluss von EX
               =================================================
             und ob Koeffizienten von EX und DAUER uebereinstimmen
             =====================================================


                         Results of Parameter Analysis
                         =============================


                         Standard
Parameter  Estimate        Error        t-statistic    P-value
TEST2      -.157516E-02  .849791E-04    -18.5358       [.000]
TEST4      -.016323      .589469E-02    -2.76902       [.006]

Wald Test for the Hypothesis that the given set of Parameters are jointly zero:

CHISQ(2) =   583.92588     ; P-value = 0.00000

F Test for the Hypothesis that the given set of Parameters are jointly zero:

F(2,1743)    =   291.96294     ; P-value = 0.00000
```

Koeffizienten unterscheiden sich signifikant ⑤

gemeinsamer Test wird abgelehnt

Themen: Multiples Regressionsmodell

Interpretation verschiedener Modelle mit Dummyvariablen

Dummyvariablen sind künstliche Variablen in einem Regressionsmodell. Sie können den Wert „0“ oder „1“ annehmen und kennzeichnen dadurch, ob ein bestimmtes Merkmal zutrifft oder nicht.

	Mann	Frau
Erwarteter Lohn	β_1	$\beta_1+\beta_2$
Lohndifferenz zwischen Frau und Mann (Frau-Mann)	β_2	

①

$$w_i=\beta_1+\beta_2 \cdot DFRAU_i+u_i$$
$$\text{wobei:}$$
$$\hat{\beta}_1=\bar{w}_m$$
$$\hat{\beta}_2=\bar{w}_f-\bar{w}_m$$
$$\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2=\bar{w}_f$$

	Mann	Frau
Erwarteter Lohn	$\gamma_1+\gamma_2$	γ_1
Lohndifferenz zwischen Frau und Mann (Frau-Mann)	γ_2	

②

$$w_i=\gamma_1+\gamma_2 \cdot DMANN_i+u_i$$
$$\text{wobei:}$$
$$\hat{\gamma}_1=\bar{w}_f$$
$$\hat{\gamma}_2=\bar{w}_m-\bar{w}_f$$
$$\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2=\bar{w}_m$$

	Mann	Frau
Erwarteter Lohn	$\delta_1\ \eta$	δ_2
Lohndifferenz zwischen Frau und Mann (Frau-Mann)	$\delta_2-\delta_1$	

③

$$w_i=\delta_1 \cdot DMANN_i+\delta_2 \cdot DFRAU_i+u_i$$
$$\text{wobei:}$$
$$\hat{\delta}_1=\bar{w}_m$$
$$\hat{\delta}_2=\bar{w}_f$$
$$\hat{\delta}_2-\hat{\beta}_1=\bar{w}_f-\bar{w}_m$$

Dieses Modell ist ökonometrischer Unsinn. Es ist auch aus folgenden Gründen nicht schätzbar: rang(X'X)=2, da $DFRAU_i$ + $DMANN_i$ =1 (kein voller Rang). Deshalb ist die Matrix (X'X) nicht invertierbar und man kann die Parameter nicht identifizieren.

	Mann	Frau
Erwarteter Lohn	$\eta_1+\eta_3$	$\eta_1+\eta 2$
Lohndifferential zwischen Frau und Mann	$\eta_2-\eta_3$	

④

$$w_i=\eta_1+\eta_2 \cdot DFRAU+\eta_3 \cdot DMANN_i+u_i$$